EUROPEAN
UNIVERSITY AT
SAINT-PETERSBURG

Вера Кипяткова

Асимптотика равновесных траекторий в модели эндогенного роста с вогнутой функцией потребления

Препринт Ec-03/08

Факультет экономики

Санкт-Петербург
2008

УДК 330.4
ББК 65В6

В. А. Кипяткова. Асимптотика равновесных траекторий в модели эндогенного роста с вогнутой функцией потребления. Препринт. – СПб., 2008. - 26 с.

Рассматривается АК-модель экономического роста, основанная на предположении о том, что в экономике действует несколько агентов, изначально обладающих разными уровнями благосостояния, причем норма сбережений каждого агента зависит от его благосостояния. Основное внимание уделяется асимптотическому поведению равновесных траекторий.

Печатается по решению Ученого совета СПб ЭМИ РАН

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научно-исследовательского проекта №08-06-00423 «Разработка и анализ моделей экономического роста и распределения с неоднородными потребителями».

АСИМПТОТИКА РАВНОВЕСНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МОДЕЛИ ЭНДОГЕННОГО РОСТА С ВОГНУТОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Введение

В современной литературе пока мало представлены модели роста, где явным образом учитывается неоднородность экономических агентов и их эндогенные межвременные предпочтения. Между тем именно подобные модели могут наилучшим образом осветить вопрос о влиянии неравенства на рост.

В данной работе предлагается АК-модель экономического роста, основанную на предположении о том, что в экономике действует несколько агентов, изначально обладающих разными уровнями благосостояния. Эти экономические агенты определяют нормы своего потребления и сбережения в зависимости от их благосостояния. В результате такой постановки вопроса оказывается, что сбережения в экономике зависят от распределения богатства. Это позволяет установить взаимосвязь между темпами экономического роста и социально-экономическим неравенством.

Современная теория экономического роста берет свое начало с модели Солоу [1], в которой основное внимание уделяется вопросам накопления капитала и связи двух основных факторов производства: труда и капитала. Модель Солоу является простейшей макроэкономической моделью, описывающей динамику капитала и выпуска в экономике с постоянным экзогенно заданным темпом роста населения и заданной нормой сбережений.

Поскольку в модели Солоу не была отражена зависимость темпа экономического роста от поведения экономических агентов, в 1960-гг. большую популярность приобрела модель Рамсея, включаяая в себя задачу максимизации репрезентативным потребителем своей полезности. В этом случае норма сбережений определяется межвременными предпочтениями агента и становится эндогенной переменной. В дальнейшем было создано множество модификаций модели Рамсея. Одна из них была предложена Беккером [2], который предложил модель рамсеевского типа с множеством неоднородных агентов, различающихся по уровню «терпеливости», каждый из которых решает оптимизационную задачу о размере своих сбережений. Беккер вводит понятие равновесия в построенной модели и доказывает, что равновесие существует и единственно. Оно характеризуется тем, что самый терпеливый агент аккумулирует весь основной капитал, доходы остальных равны размеру их заработной платы, которая целиком расходуется на потребление. Норма прибыли в экономике совпадает со ставкой дисконтирования самого терпеливого агента, то есть агента, обладающего самым высоким коэффициентом межвременного дисконтирования. Остальным агентам, не обладающим столь высоким уровнем терпения, сберегать оказывается невыгодно. Еще одним интересным свойством этой модели является то, что в состоянии равновесия агенты эндогенным образом делятся на два класса: «накопителей» и чистых потребителей.

В 1980-гг. возникла новая волна теорий экономического роста, центральным пунктом исследования которых являлся технический прогресс и причины его возникновения. Основной задачей был поиск внутренних источников постоянного роста, поэтому такие модели получили название «эндогенные теории роста», в отличие от прежних, «экзогенных».

Было бы небезынтересно построить модель эндогенного роста с неоднородными агентами. Это делается в работе [3], где рассматривается АК-модель с неоднородными агентами, обладающими различными экзогенно заданными коэффициентами дисконтирования. Основные принципы построения этой модели совпадают с постановкой задачи у Беккера.

В результате того, что в упомянутых моделях коэффициенты дисконтирования определяются экзогенным образом и неизменны во времени, лишь один, самый «терпеливый» агент осуществляет сбережения. Однако этот вывод кажется нам не слишком правдоподобным. Он не учитывает многих существенных факторов, объясняющих сбережения, в частности, мотива жизненного цикла.

Мотив жизненного цикла играет ключевую роль в моделях перекрывающихся поколений. При этом следует заметить, что некоторая естественная постановка модели перекрывающихся поколений, предложенная в работе [4], ведет именно к постоянной норме сбережений.

А именно, предположим, что потребитель живет два периода. В периоде t он получает наследство в размере x_t и заработную плату в размере w_t, которые он тратит на потребление c_t и сбережения s_t. В периоде t+1 наш потребитель не получает заработную плату и тратит сбережения на потребление d_{t+1}, при этом оставляя наследство в размере $(1+n)x_{t+1}$, где $1+n$ – количество наследников данного наследника. Таким образом, его бюджетные ограничения выглядят следующим образом:

$$x_t + w_t = c_t + s_t, \quad (1+r_t)\, s_t = d_{t+1} + (1 + n)x_{t+1},$$

где r_t – ставка процента в периоде t.

Потребитель максимизирует свое благосостояние с помощью функции полезности, значение которой зависит от размера его потребления как в первом, так и во втором периоде его жизни, а также включает в себя благосостояние наследников. Пусть функция полезности имеет логарифмическую форму:

$$U(c_t, d_{t+1}, x_{t+1}) = \ln c_t + \beta \ln d_{t+1} + \gamma\beta \ln x_{t+1},$$

где β – межвременной коэффициент дисконтирования, с помощью которого агент взвешивает потребление в настоящем и будущем периодах, а γ – коэффициент «альтруизма» агента, показывающий, как соотносит агент свое благосостояние с благосостоянием своих наследников. В этом случае в результате решения оптимизационной задачи об оптимизации полезности на бюджетных ограничениях получается, что объем сбережений потребителя равен $s\Omega_t$, где $s = \dfrac{\beta + \beta\gamma}{1 + \beta + \beta\gamma}$ – норма сбережения потребителя, а $\Omega_t = w_t + (1+r_t)x_t$ – его богатство в периоде t. Очевидно, что норма сбережений монотонно возрастающим образом зависит от субъективного коэффициента дисконтирования β и коэффициента альтруизма γ.

Дифференциация агентов по уровню «терпеливости» в моделях обусловлена осознанием необходимости отразить существующую в реальности неоднородность экономических агентов. Очевидно, для построения более адекватной модели важно разобраться в природе неоднородности и причинах ее возникновения. Казелли и Вентура [5] выделяют три самых существенных источника неоднородности: навыки, исходный уровень благосостояния и индивидуальные предпочтения агентов. Однако авторы правомерно считают, что эти факторы коррелируют между собой, то есть распределение доходов в группе агентов с близкими предпочтениями и навыками в основном сконцентрировано вокруг среднего значения. Другими словами, у агентов со схожими предпочтениями и навыками, доходы также будут мало различаться, и наоборот, уровень благосостояния в значительной степени определяет навыки и индивидуальные предпочтения. Поэтому вполне корректно дифференцировать домохозяйства по исходному размеру богатства и считать этот фактор главным источником неоднородности.

Текущий уровень благосостояния влияет на межвременные предпочтения агентов и их склонность к сбережениям. Поэтому разумным кажется рассмотрение моделей в которых нормы сбережения или коэффициенты дисконтирования определяются эндогенно и зависят от благосостояния рассматриваемого агента. Именно это и делается в настоящей работе, где делается предположение о том, что более богатые потребители являются более терпеливыми, то есть склонность к потреблению убывает с ростом дохода. Такое предположение восходит еще к Кейнсу [6] и подтверждается и эмпирическими исследованиями (см.[7-8]) и теоретическими построениями [9].

Мы будем рассматривать АК-модель, в которой делается предположение о том, что норма сбережения потребителя растет с ростом относительного уровня его благосостояния. Основное внимание уделяется асимптотическому поведению равновесных траекторий. Модель, которая здесь рассматривается, близка по духу АК-модели с эндогенными межвременными предпочтениями, предложенной в [3], но основана на более реалистичных предположениях.

Модель

1. Постановка задачи

Производственный сектор

Мы предлагаем АК-модель эндогенного роста с неоклассической производственной функцией $F:\Re_+^2 \to \Re_+$, удовлетворяющей традиционным предположениям:

$$Y=F(K,L). \tag{1.1}$$

Здесь Y – выпуск национального продукта, K – количество физического капитала, через L обозначается количество эффективного труда. Предполагаем, что количество эффективного труда задается соотношением $L=A\overline{L}$, где A – уровень технического прогресса $\overline{L}$ – количество совокупной рабочей силы, совпадающей по численности с населением. Впредь считаем, что $\overline{L}$ – постоянная величина, а капитал не амортизируется. Равенство (1.1) можно переписать в виде

$$Y=A\overline{L}f(k),$$

где $k=K/A\overline{L}$ – капиталовооруженность единицы эффективного труда, а $f(k):=F(k,1)$ – производственная функция в интенсивной форме.

Технический прогресс предполагается нейтральным по Харроду (трудодобавляющим), а его текущий уровень A зависит от других переменных и формируется эндогенным образом. Эта величина, в отличие от величины $\overline{L}$, будет меняться во времени. Мы предполагаем, вслед за Франкелем [10] и Ромером [11], что уровень технического прогресса прямо пропорционален текущему уровню средней капиталовооруженности: $A=\lambda K/\overline{L}$, где $\lambda>0$ – экзогенный параметр. Обозначая $\bar{k}=1/\lambda$, получим $K/L=\bar{k}$. Таким образом, капиталовооруженность единицы *эффективного* труда является, по существу, экзогенно заданной величиной: $k=\bar{k}$. Ниже, говоря о капиталовооруженности, мы будем подразумевать именно капиталовооруженность единицы эффективного труда.

Мы предполагаем совершенную конкуренцию на рынках труда и капитала. Это означает, что норма доходности r и заработная плата единицы эффективного труда w совпадают с предельной производительностью капитала и эффективного труда соответственно: $r=F'_K(K,L)$ и $w=F'_L(K,L)$. Отсюда, вследствие сделанных предположений, следует вывод о неизменности этих величин:

$$\bar{r}:=f'(\bar{k}), \qquad \overline{w}:=f(\bar{k})-f'(\bar{k})\bar{k}.$$

Впредь будем рассматривать величины $\bar{k}$, $\overline{w}$, $\bar{r}$ как экзогенно заданные параметры.

Обратим внимание, что $w=\overline{w}$ – это заработная плата, приходящаяся на единицу *эффективного* труда, в то время как на единицу труда приходится заработная плата в размере $A\overline{w}$. Заметим также, что в силу сделанных предположений соотношение (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$Y=\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}}K.$$

Таким образом, представленная модель принадлежит к семейству АК-моделей эндогенного роста.

Агенты

Каждый потребитель является носителем одной единицы рабочей силы и, следовательно, A единиц эффективной рабочей силы. Все множество потребителей разделено на конечное множество $\{1,\ldots,N\}$ домохозяйств, внутри каждого из которых индивиды неразличимы. Таким образом в качестве агента здесь выступает все домохозяйство. Доля $\alpha_j>0$ домохозяйства j в общей численности населения предполагается неизменной во времени, $j=1,\ldots,N$. Далее, не умаляя общности, мы будем предполагать, что $\overline{L}=1$. Тем самым численность домохозяйства j равна α_j. Домохозяйства различаются между собой начальным распределением богатства.

Пусть в момент времени t уровень технического прогресса равен A_t, предложение домохозяйства j на рынке труда неэластично, и в единицах эффективного труда оно составляет

$$L_t^j=\alpha_j L_t=\alpha_j A_t\,\overline{L}>0.$$

Кроме того, пусть сумма совокупных сбережений домохозяйства есть величина $Z_t^j>0$. Таким образом, суммарное богатство, которым располагает домохозяйство к концу периода $[t,t+1]$, составляет

$$\Omega_t^j=(1+\bar{r})Z_t^j+\overline{w}\,L_t^j.$$

Эта величина распределяется между потреблением $C_t^j\geq 0$ и сбережениями на следующий период $Z_{t+1}^j\geq 0$:

$$Z_{t+1}^j=(1+\bar{r})Z_t^j+\overline{w}\,L_t^j-C_t^j. \tag{1.2}$$

В духе работ [12] и [13], мы принимаем гипотезу об относительном богатстве, суть которой состоит в том, что размер сбережений индивида зависит не только от размера его благосостояния $\omega_t^j=\Omega_t^j/\alpha_j$, но и от его положения относительно среднедушевого уровня богатства в экономике

$$\Omega=K+F(K,L).$$

Мы уже упоминали о том, что объем сбережений принимает значение в результате решения потребителем некоторой оптимизационной задачи, причем было показано, что норма сбережений соответствует степени «терпеливости» агента. С учетом этих рассуждений предполагаем, что сбережения определяются с помощью функции S: $\Re_+^2 \to \Re_+$, обладающей следующими свойствами:

$$S(0,\Omega)=0,\ \ 0\le S(\omega,\Omega)<\omega,\ S_1(\omega,\Omega)>0,$$
$$S_{11}(\omega,\Omega)>0,\ ,\ S_1(\omega,\Omega)\xrightarrow[\omega\to\infty]{}1. \qquad (1.3)$$

Суть первых двух свойств ясна: так как рынок кредитов предполагается несовершенным, то размер сбережений должен быть, по крайней мере, неотрицательным. В силу тех же соображений объем сбережений не может превышать размера богатства агента. Третье свойство вытекает из того, что чем богаче агент, тем больше он сберегает, причем предельная склонность к сбережениям возрастает по мере увеличения богатства. Что касается последнего свойства – оно мотивировано тем, что доля сбережений, возрастая, стремится к единице по мере увеличения размера богатства, то есть сберегается почти все. Если принять гипотезу об относительном богатстве, то функция S должна быть положительно однородной первой степени: если богатство j-го домохозяйства и средний уровень богатства в обществе увеличиваются в одинаковой пропорции, то в той же пропорции увеличиваются и сбережения.

Таким образом, среднедушевой уровень сбережений в j-ом домохозяйстве в конце периода t определяется следующим образом:

$$\frac{Z_{t+1}^{j}}{\alpha_j}=S(\omega_t^j,\Omega). \qquad (1.4)$$

Для удобства анализа введем функцию, описывающую удельные сбережения. Для этого определим функцию $s{:}\,\Re_+ \to \Re_+$ с помощью равенства

$$s(x)=S(x, f(\bar{k})+\bar{k}). \qquad (1.5)$$

Здесь x обозначает уровень богатства домохозяйства в расчете на единицу эффективной рабочей силы, а

$$f(\bar{k})+\bar{k}=\frac{F(K,L)+K}{L}$$

– богатство во всей экономике, также в расчете на единицу эффективной рабочей силы. В силу своего определения значение $s(x)$ – это размер сбережений в расчете на единицу эффективного труда при заданном среднедушевом богатстве в экономике. Следует заметить, что по определению

$$s(k+f(k))=S(k+f(k),\ k+f(k))=(k+f(k))S(1,1), \qquad (1.6)$$

поэтому величину $S(1,1)$ следует трактовать как норму сбережений в том случае, если все агенты идентичны, это «усредненная» норма сбережений в экономике.

Из (1.3) следует, что функция сбережений $s(x)$ обладает следующими свойствами: она является монотонно возрастающей, строго выпуклой и при всех $x>0$ удовлетворяет соотношениям $0<s(x)<x$. Кроме этого.

$$s'(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1. \qquad (1.7)$$

Другими словами, домохозяйство по мере увеличения относительного уровня своего богатства, все более предпочитает сберегать, уменьшая при этом долю конечного потребления.

Подставляя (1.5) в (1.4), и используя $L_t^j=\alpha_j L_t=\alpha_j K_t/\bar{k}$, получаем

$$\frac{Z_{t+1}^j}{\boldsymbol{\alpha}_j} = S(\omega_t^j,\Omega) = S\left(\frac{(1+\bar{r})Z_t^j+\bar{w}L_t^j}{\alpha_j}, \frac{f(\bar{k})+\bar{k}}{\bar{k}}K_t\right)=$$

$$=\frac{L_t^j}{\boldsymbol{\alpha}_j}S((1+\bar{r})\,z_t^j+\bar{w}, f(\bar{k})+\bar{k})=$$

$$=\frac{L_t^j}{\boldsymbol{\alpha}_j}s(1+\bar{r})\,z_t^j+\bar{w})), \qquad (1.8)$$

где

$$z_t^j=Z_t^j/L_t^j$$

– сбережения j-го домохозяйства в момент времени t в расчете на единицу эффективного труда. Переписывая (1.8), получим:

$$Z_{t+1}^j=L_t^j\,s((1+\bar{r})\,z_t^j+\bar{w}). \qquad (1.9)$$

Обозначим через $1+n_t$ темп роста физического капитала за период $[t,t+1]$. Он определяется с помощью равенства

$$1+n_t=K_{t+1}/K_t.$$

Особенностью АК-моделей является предположение о том, что капитал K_t и эффективный труд L_t растут с одинаковым темпом роста: $1+n_t=L_{t+1}/L_t=K_{t+1}/K_t$. А поскольку $L_t^j=\alpha_j L_t$ где доли α_j постоянны во времени, то $1+n_t=L_{t+1}^j/L_t^j$ для любого j. Это рассуждение приводит нас к тому, что (1.9) можно переписать в следующем виде:

$$(1+n_t)\,z_{t+1}^j=\varphi(z_t^j), \qquad (1.10)$$

где функция $\varphi:\Re_+\to\Re_+$ задается равенством

$$\varphi(z)=s((1+\bar{r})z+\bar{w}).$$

Эта функция является дважды непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей и строго выпуклой, причем

$$\varphi(0)=s(\bar{w})>0 \text{ и } 0<\varphi(z)<((1+\bar{r})z+\bar{w})$$

для любого $z > 0$.

Вывод основного уравнения динамики.

Предположим, что в некоторый момент времени t домохозяйство $j=1,\ldots,N$ обладает суммой сбережений в размере Z_t^j. В модели весь капитал, участвующий в производстве, формируется из сбережений домохозяйств, что находит отражение в следующем балансовом уравнении:

$$K_t = \sum_{j=1}^{N} Z_t^j \, .$$

Поделив обе части этого соотношения на L_t, получаем:

$$\bar{k} = \sum_{j=1}^{N} \frac{L_t^j}{L_t} \frac{Z_t^j}{L_t^j} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j z_t^j \, . \tag{1.11}$$

Соотношение (1.10) выполняется для любого $t \geq 1$, поэтому, умножая обе его части на α_j и суммируя по j, мы с помощью уравнения (1.11) получаем важное соотношение, в котором отражена взаимосвязь между темпом роста экономики и сбережениями домохозяйств:

$$1 + n_t = \frac{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi(z_t^j)}{\bar{k}} \, . \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.10), получаем соотношение, описывающее динамику модели:

$$z_{t+1}^j = \frac{\varphi(z_t^j)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi(z_t^i)} \bar{k}, \quad j = 1, \dots, N \, . \tag{1.13}$$

Не умаляя общности, в дальнейшем мы предполагаем, что $N > 1$, а домохозяйства пронумерованы таким образом, что $z_0^1 \leq z_0^2 \leq \ldots \leq z_0^N$.

Условимся также, что основной параметр системы - капиталовооруженность $\bar{k}$ экзогенно задана и впредь будем обозначать ее через k. Также условимся писать r вместо $\bar{r}$ и w вместо $\overline{w}$.

Далее под состоянием модели в момент t мы будем понимать вектор $(z_t^1, z_t^2, \ldots, z_t^N)$, а последовательность $(z_t^1, z_t^2, \ldots, \;)_{t=0,1,\ldots}$, построенную по набору соотношений (1.13) – называть равновесной траекторией.

2. Анализ траекторий сбалансированного роста.

Определим траектории сбалансированного роста и исследуем их свойства. Однако перед тем как мы перейдем к формальному определению, нам потребуются некоторые предварительные рассуждения. Рассмотрим некоторое стационарное состояние системы (1.13), т.е. такую траекторию сбалансированного роста $(z_t^1, z_t^2, \ldots, z_t^N)_{t=0,1,\ldots}$, что для некоторого вектора $(z^1, \ldots, z^N)$ выполняются равенства

$$z^j = z_0^j = z_1^j = \ldots = z_t^j = \ldots, \; j = 1, \ldots, N.$$

Принимая во внимание (1.10), существует такое число n, что $1+n$ – есть темп роста и для которого выполняется

$$\varphi(z^j) = (1+n) z^j, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Это значит, что каждое из z^j является решением уравнения

$$\varphi(z) = (1+n) z \tag{2.1}$$

относительно z. Поскольку мы установили, что $\varphi(\cdot)$ является строго выпуклой функцией, то уравнение (2.1) имеет не более двух решений (см. рис. 1).

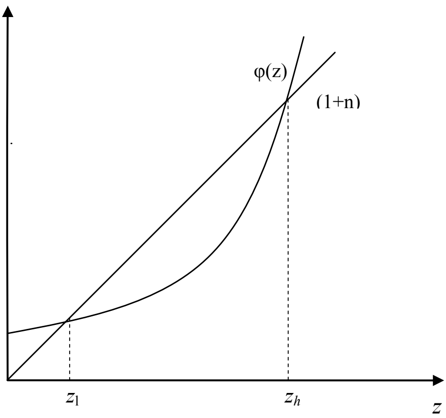

Рис. 1. Стационарные равновесия в модели с выпуклой функцией сбережения

Обозначим меньшее решение через z_l^*, а большее через z_h^* (в случае, когда у (2.1) решение лишь одно, эти величины, естественно, совпадают). Таким образом, при заданном темпе роста $1+n^*$ величина сбережений j-го домохозяйства z^j на единицу эффективной рабочей силы в соответствующем стационарном состоянии может равняться либо z_l^*, либо z_h^*. Те домохозяйства, для которых данная величина равна z_l^*, мы будем называть «бедными», а те, для которых она равна z_h^*, – «богатыми». Долю «богатых» в общем населении мы обозначим через σ. Очевидно, что доля «бедных» составляет 1–σ. Заметим, что эти доли определяются эндогенным образом. Теперь мы можем дать следующее определение.

Определение 2.1. *Набор* (n^*, z_l^*, z_h^*, σ^*), *где* $\sigma^*\in[0,1]$, *называется стационарным равновесием, если* z_l^* *является меньшим, а* z_h^* *является большим решением уравнения* (*2.1*) *при* $n=n^*$, *а также выполняется равенство*

$$\sigma^* z_h^* + (1-\sigma^*)\, z_l^* = k.$$

Значение $1+n^*$ - это сбалансированный темп роста. Равновесие (n^*, z_l^*, z_h^*, σ^*) называется разделяющим, если $z_l^* < z_h^*$ и $0<\sigma^*<1$, в противном случае оно называется неразделяющим. Смысл этого определения состоит в том, что неразделяющее равновесие – это равновесие, при котором все агенты в обществе имеют одинаковый уровень благосостояния, а разделяющее – наоборот, характеризуется присутствием в экономике как «бедных», так и «богатых». Каждому стационарному равновесию (n^*, z_l^*, z_h^*, σ^*) соответствует некоторая траектория сбалансированного роста в построенной модели. На этой траектории сбережения на единицу эффективного труда для каждого агента неизменны и равняются либо z_l^*, либо z_h^*, а совокупный объем капитала, эффективного труда и выпуск растут с постоянным темпом роста $1+n^*$.

Заметим, что в неразделяющем равновесии либо $z_l^*=z_h^*=k$, либо $\sigma^*=0$, либо $\sigma^*=1$. Не умаляя общности, говоря о неразделяющем равновесии, мы будем всегда предполагать, что реализуется первая возможность, то есть

$$z_l^*=z_h^*=k.$$

Прежде чем перейти к анализу равновесий, введем дополнительные обозначения и докажем весьма полезную лемму. Определим функцию $\psi:\Re_+\to\Re_+$ посредством равенства

$$\psi(z)=\varphi(z)/z$$

и положим

$$g=\lim_{z\to\infty}\psi(z).$$

С помощью условия (1.7), получим

$$g=\lim_{z\to\infty}\psi(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{s((1+r)z+w)}{z}=\lim_{y\to\infty}\frac{s(y)}{y}\cdot\lim_{z\to\infty}\frac{(1+r)z+w}{z}=$$
$$=1+r=1+f'(k). \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Для функции $\psi(z)$ верно одно из двух следующих утверждений:*

1. *$\psi(z)$ монотонно убывает и выпукла на* $[0, \infty)$,
2. *$\psi(z)$ достигает наименьшего значения в некоторой точке* $z_{\min}$, *причем $\psi(z)$ монотонно убывает на* $[0,z_{\min}]$ *и монотонно возрастает на* $[z_{\min}, \infty)$. *Кроме того, в этом случае функция ψ является выпуклой на участке* $[0, z_{\min}]$.

Доказательство. Заметим, что $\lim_{z\to 0}\psi(z) = +\infty$, $g < \infty$. Вычислим производную $\psi(z)$:

$$\psi'(z)=\frac{\varphi'(z)z-\varphi(z)}{z^2}$$

Для определения знака производной достаточно определить знак числителя этой дроби. Положим $d(z) = \varphi'(z)z-\varphi(z)$. Поскольку $\varphi'(0) < +\infty$, то $d(0) = -\varphi(0) < 0$. Кроме того, $d'(z) = \varphi''(z)z \geq 0$. Осталось отметить, что возможны два варианта: либо существует $z_{\min}$ такое, что $d(z) < 0$ при $z < z_{\min}$

и $d(z) > 0$ при $z > z_{\min}$ и тогда у ψ две ветви монотонности, либо такого $z_{\min}$ нет, и тогда $d(z) < 0$ при всех $z > 0$, следовательно, $\psi(z)$ – монотонно убывающая функция.
Теперь докажем выпуклость функции ψ. Для доказательства вычислим вторую производную функции ψ.

$$\psi'' - \frac{\varphi''}{z} + \frac{2}{z^2}\left(\frac{\varphi}{z} - \varphi'\right) \geq 0$$

поскольку $\varphi'' \geq 0$ и $\frac{\varphi}{z} \geq \varphi$ на участке $[0, z_{\min}]$.

Определение 2.2. *Будем говорить, что функция ψ относится к* I *типу, если она удовлетворяет условиям пункта* 1, *и относится ко* II *типу, если удовлетворяет условиям пункта* 2.

Примеры.

1. Пусть $s(y)=y\text{-}\ln(1+y)$. Тогда $\varphi(z)=w+(1+r)z-\ln(1+w+(1+r)z)$ и

$$d(z) = z\varphi'(z) \quad \varphi(z) = \frac{(1+w)(w+(1+r)z)}{1+w+(1+r)z} + ln(1+w+(1+r)z).$$

Очевидно, $d(0)=-w+\ln(1+w)<0$, $lim_{z\to\infty} d(z) = +\infty$. Поэтому для любых значений w и r существует $z_{\min}$, на котором функция $\psi(z)$ достигает минимального значения.

2. Пусть $s(y)=y-1+\exp(-y)$. Тогда $\varphi(z)=w+(1+r)z-1+\exp(-w-(1+r)z)$, $d(z)=1-w-(1+(1+r)z)\exp(-w-(1+r)z)$. Получаем, что $d(0)=1–w–\exp(–w)<0$, $lim_{z\to\infty} d(z) = 1 - w$. Поэтому в этом случае вид функции $\psi(z)$ зависит от параметра w: если $w<1$, то $z_{\min}$, доставляющее минимальное значение, существует, в противном случае – нет.

Замечания.

1. В точке $z_{\min}$ выполняется: $\varphi'(z)=\varphi(z)/z$.
2. Обозначим через a решение уравнения $\psi(a)=g$. Тогда в силу (2.2) выполняется

$$\psi(a) = \frac{\varphi(a)}{a} = 1 + f'(k).$$

Как a, так и $z_{\min}$ – зависят от параметра k.

Перед тем, как сформулировать теорему 2.1 проведем некоторые рассуждения, проиллюстрированные рисунками 2, 3 и 4. Если функция ψ относится к I типу, то она монотонно убывает, поэтому выполняется $\psi(k)>g$. Применяя (1.6), получим

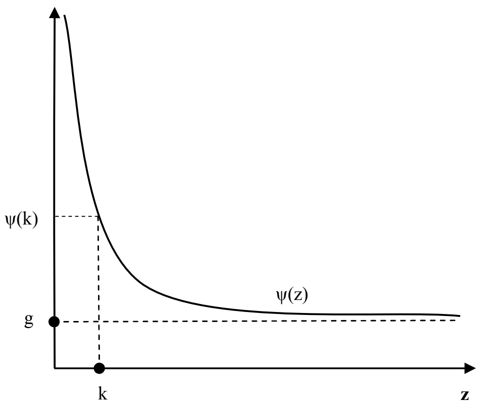

Рис. 2. Иллюстрация случая с неразделяющим равновесием и функцией ψ I типа

$$\psi(k)=\frac{\varphi(k)}{k}=\frac{s(k+f(k))}{k}=S(1,1)(1+\frac{f(k)}{k}),$$

кроме того, по определению,

$$g=1+f'(k),$$

тогда условие $\psi(k)>g$ эквивалентно условию

$$S(1,1)(1+\frac{f(k)}{k})>1+f'(k). \qquad (2.3)$$

Другими словами, если «усредненная» норма сбережений превышает долю капитала в совокупном выпуске, то, как очевидно из рисунка 2, существует единственное неразделяющее стационарное равновесие. То же рассуждение применимо в случае, если ψ относится ко II типу, но выполняется

$$S(1,1)(1+\frac{f(k)}{k}) > 1 + f'(k) \qquad \text{(см. рис. 3).}$$

Тогда также существует единственное неразделяющее равновесие.
Иная ситуация складывается, если ψ относится ко II типу, но

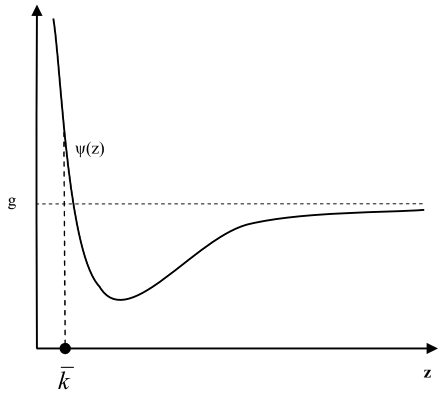

Рис. 3. Иллюстрация случая с неразделяющим равновесием с функцией ψ II типа

$$S(1,1)(1+\frac{f(k)}{k}) < 1 + f'(k). \qquad (2.4)$$

Рисунок 4 демонстрирует, что стационарных равновесий в модели существует бесконечно много, причем все, кроме одного - разделяющие. И, наконец, пограничный случай:

$$S(1,1)(1+\frac{f(k)}{k}) = 1 + f'(k).$$

Здесь существует единственное неразделяющее стационарное равновесие, но при этом для равновесного темпа роста выполняется $1+n=\psi(k)=1+f'(k)$. Вышеприведенные рассуждения позволяют нам произвести классификацию стационарных равновесий.

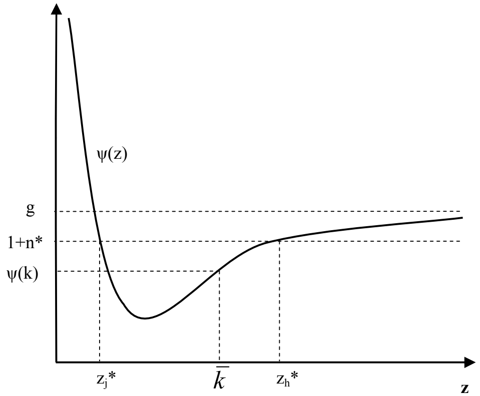

Рис. 4. Иллюстрация случая с разделяющим равновесием и функцией ψ II типа

Теорема 2.1. *(Классификация стационарных равновесий).*

1. *Если* $S(1,1)(1+\frac{f(k)}{k}) \geq 1+f'(k)$*, то существует единственное стационарное равновесие* (n^*, z_l^*, z_h^*, σ^*)*, которое задается соотношениями* $z_l^* = z_h^* = k$ *и* $1+n^* = \psi(k)$*.*

2. *Если* $S(1,1)(1+\frac{f(k)}{k}) < 1+f'(k)$*, то для любого числа* n^**, удовлетворяющего условию* $\psi(k) \leq 1+n^* < g$*, существуют* z_l^**,* z_h^* *и* σ^**, такие что набор* (n^*, z_l^*, z_h^*, σ^*) *является стационарным равновесием. Причем, если* $\psi(k) = 1+n^*$*, то это равновесие является неразделяющим, если* $\psi(k) < 1+n^*$ *- разделяющим.*

3. Асимптотическое поведение равновесных траекторий в модели с конечным числом агентов

Нами построена модель, равновесные траектории которой удовлетворяют соотношениям (1.13):

$$z_{t+1}^j = \frac{\varphi(z_t^j)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi(z_t^i)} k, \quad j = 1, \ldots, N \tag{3.1}$$

при заданном начальном состоянии $(z_0^1,\ldots,z_0^N)$, удовлетворяющем условию $0<z_0^1<z_0^2<\ldots<z_0^N$. Темп роста определяется соотношением

$$1+n_t=\frac{\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\varphi(z_t^j)}{k}. \tag{3.2}$$

Нас интересуют асимптотические свойства равновесных траекторий. Но перед тем как приступить к их исследованию, сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Предположим, что в экономике действует один репрезентативный агент с постоянной нормой сбережения, то есть функция сбережений является линейной: $s(y)\equiv sy$. Тогда $z_t\equiv k$, и темп роста задается соотношением

$$1+n_t\equiv\frac{s\cdot(k+f(k))}{k}=s\cdot\left(1+\frac{f(k)}{k}\right).$$

В этом случае переходная динамика отсутствует, экономика растет с постоянным устойчивым темпом роста.

Замечание 2. Предположим, что в экономике действует конечное число агентов N, каждый из которых обладает постоянной нормой сбережения: $s(y)\equiv sy$, при этом начальные уровни благосостояния у агентов различаются: $0<z_0^1<z_0^2<\ldots<z_0^N$

Тогда динамика в модели описывается так:

$$z_{t+1}^j=\frac{s\cdot((1+r)z_t^j+w)}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i s\cdot((1+r)z_t^i+w)}k=\frac{(1+r)z_t^j+w}{k+f(k)}k=k+\frac{1+f'(k)}{1+\frac{f(k)}{k}}(z_t^j-k),$$

$$j=1,\ldots,N. \tag{3.3}$$

Поскольку для неоклассической производственной функции всегда выполняется $1+f'(k)<1+\frac{f(k)}{k}$, то есть предельная производительность меньше средней, условие (3.3) гарантирует асимптотическую сходимость к единственному глобально устойчивому неразделяющему равновесию. То есть если норма сбережения одинакова для всех, начальное распределение богатства не оказывает существенного влияния на долгосрочное поведение равновесных траекторий. Как мы уже писали, предположение о репрезентативном потребителе не исключает неоднородности агентов, но смысл ее в том, что неоднородность агентов не влияет на значение макроэкономических показателей.

Замечание 3. Перед тем как приступить к анализу динамической системы (3.1) проведем исследование модели в предположении о том, что нормы сбережений различаются между агентами, но являются экзогенно заданными и постоянными. Пусть сбережения агента i являются линейной функцией от его богатства, при этом средняя норма сбережений совпадает с предельной и предполагается равной s_i>0. В этом случае динамическая система (3.1) переписывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&(1+n_t)z_{t+1}^i = s_i((1+r)z_t^i + w), \quad i = 1,\dots,N\\
&\sum\nolimits_{i=1}^N \alpha_i z_t^i = k\\
&t = 0,1,\dots
\end{aligned}
$$

где $z_0^i, i = 1,\cdots,N$ – заданное начальное состояние. Для удобства анализа введем следующие обозначения: $\boldsymbol{z}_t = (z_t^1, z_t^2, \dots, z_t^N)$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ – векторы из $\mathbf{R}^N$ и определим следующую матрицу:

$$
S = \begin{pmatrix}
\frac{w}{k}s_1\alpha_1 + (1+r)s_1 & \frac{w}{k}s_1\alpha_2 & \cdots & \frac{w}{k}s_1\alpha_N\\
\frac{w}{k}s_2\alpha_1 & \frac{w}{k}s_2\alpha_2 + (1+r)s_2 & \cdots & \frac{w}{k}s_2\alpha_N\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{w}{k}s_N\alpha_1 & \frac{w}{k}s_N\alpha_2 & \cdots & \frac{w}{k}s_N\alpha_N + (1+r)s_N
\end{pmatrix}
$$

В этих обозначениях динамическая система (3.1) переписывается в виде

$$
\boldsymbol{z}_{t+1} = \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}_t}{1+n_t} \qquad t = 0,1,\dots
$$

$$
\text{где } 1+n_t = {(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{z}_t)}/{k}
$$

Стационарным равновесием этой системы является набор $(1+n^*, \boldsymbol{z}^*)$, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$
1+n^*>0, \qquad \boldsymbol{z}^*\geq 0,\ (\alpha, \boldsymbol{z}^*)=k, \qquad (1+n^*)\mathbf{z}^*=\mathbf{S}\mathbf{z}^*
$$

Очевидно, что в этом случае $1+n^*$ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{S}$, а вектор $\boldsymbol{z}^*$ - соответствующим этому числу собственным вектором.

Стационарное равновесие существует и единственно. Действительно, матрица $\boldsymbol{S}$ является положительной матрицей, поэтому по теореме Перрона-Фробениуса [14], у нее существует, по крайней мере, одно положительное собственное число и принадлежащий ему положительный собственный вектор. Существование стационарного равновесия вытекает непосредственно из этого факта. Наибольшее такое собственное число обладает кратностью 1 и называется перроновым, так же, как и принадлежащий ему собственный вектор. Кроме того, из свойств положительных матриц вытекает, что перронов вектор - единственный собственный вектор, имеющий все неотрицательные компоненты. Таким образом, стационарное равновесие существует и единственно.

Исследование сходимости в данном случае тоже несложно. Положим $y_0=z_0$ и рассмотрим систему:

$$y_{t+1}=\frac{Sy_t}{1+n^*}\qquad t=0,1,\ldots$$

где $1+n^*$ - собственное перроново число матрицы S. В этом случае по теореме Перрона-Фробениуса

$$y_t=\frac{S^t y_0}{(1+n^*)^t}\xrightarrow[t\to\infty]{} const\cdot z^*$$

Но тогда $z_t\xrightarrow[t\to\infty]{} z^*$, поскольку z_t коллинеарен y_t, причем для любого t все векторы z_t лежат в гиперплоскости, задаваемой уравнением $(\alpha, x)=k$.

Полученный результат свидетельствует о том, что начальное состояние в данном примере не влияет на асимптотику, которая предопределена значением вектора z^*. Любая равновесная траектория сходится к единственному равновесному вектору z^*, причем все компоненты z^* строго положительны.

Именно предположение о том, что нормы сбережений задаются эндогенным образом (в зависимости от уровня богатства агента) существенным образом меняет характер сходимости и динамику поведения системы (3.1). Оказывается, любая траектория в нашей модели сходится к некоторому состоянию, которому соответствует одно из стационарных равновесий модели.

Теорема 3.1. *Любая равновесная траектория* $(z_t^1,\ldots,z_t^N)_{t=0,1,\ldots}$, *исходящая из* $(z_0^1,\ldots,z_0^N)$

1. *либо сходится к неразделяющему равновесию в том смысле, что* $z_t^j\xrightarrow[t\to\infty]{} k$, $j=1,\ldots,N$,
2. *либо сходится к некоторому разделяющему равновесию* $(n^*, z_l^*, z_h^*, \sigma^*)$ *в том смысле, что*
$$z_t^N\xrightarrow[t\to\infty]{} z_h^*,\ z_t^j\xrightarrow[t\to\infty]{} z_l^*,\ j=1,\ldots,N-1,$$
причем $\sigma^*=\alpha_N$.

Доказательство. В силу определения 2.2 функция ψ принадлежит к одному из двух типов, поэтому доказательство теоремы естественным образом разбивается на две части. Первая часть описывается предложением 3.1, вторая – предложением 3.2.

При доказательстве нам будет иногда удобно проводить анализ системы (3.1) в следующем виде, который легко выводится применением (3.2):

$$z_{t+1}^j = \frac{\varphi(z_t^j)}{1+n_t}, \quad j = 1,\ldots,N \tag{3.4}$$

Предложение 3.1. *Пусть* $\psi(z)$ *относится к типу I. Тогда для любой равновесной траектории* $\left\{z_t^1, z_t^2, \ldots, z_t^N\right\}_{t=0}^{\infty}$, *выполняется*

$$z_t^j \xrightarrow[t\to\infty]{} k, \quad j = 1,\ldots,N.$$

Доказательство. Мы предположили, что в исходном распределении $z_0^1 < z_0^2 < \ldots < z_0^N$, поэтому

$$\psi(z_0^1) > \psi(z_0^2) > \ldots > \psi(z_0^N).$$

Следовательно, при всех t

$$\psi(z_t^1) = \max_j \psi(z_t^j) > 1 + n_t > \min_j \psi(z_t^j) = \psi(z_t^N).$$

В силу (3.4) и предположения о типе функции ψ имеем $z_{t+1}^N < z_t^N$, t=0,1,… Следовательно, $\left\{z_t^N\right\}_{t=0}^{\infty}$ – монотонно убывающая последовательность, значит, она имеет предел: $z_t^N \xrightarrow[t\to\infty]{} z^N$. Аналогично, $z_t^1 \xrightarrow[t\to\infty]{} z^1$. Теперь рассмотрим любые i и j такие, что при некотором t выполняется $z_t^i < z_t^j$. В силу (3.4) $z_{t+1}^i = \frac{\varphi(z_t^i)}{1+n_t}$, $z_{t+1}^j = \frac{\varphi(z_t^j)}{1+n_t}$. Функция $\psi(\cdot)$ – монотонно убывает, следовательно, $\frac{z_t^i}{z_t^j} < \frac{z_{t+1}^i}{z_{t+1}^j} < \ldots$. Поэтому последовательность $\left\{z_t^i / z_t^j\right\}_{t=0}^{\infty}$, будучи монотонно возрастающей и ограниченной сверху (числом 1), сходится. Используя уже установленную сходимость последовательности $\left\{z_t^N\right\}_{t=0}^{\infty}$, делаем вывод, что z_t^j сходится к некоторому z^j, и это верно для любого j. Отсюда сразу следует, что $1+n_t$ сходится к некоторому $1+n^*$.

Переходя к пределу в (3.4), получим

$$z^j = \frac{\varphi(z^j)}{1+n^*}.$$

Но это значит, что значение $\psi(z^j)$ одинаково для всех j. Отсюда немедленно получаем $z^j = k$, j=1,...,N, следовательно, $z_t^j \xrightarrow[t\to\infty]{} k, \quad j = 1,\ldots,N$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.1. *Пусть* $\psi(z)$ *относится к типу II (то есть достигает наименьшего значения в некоторой точке* $z_{\min}$*). Тогда для любого* j=1,…,N-1 *существует момент времени* T *такой, что для любого* $t \geq T$ *выполняется* $z_t^j < z_{\min}$. *Кроме этого, для любых* i, j=1,…,N-1 *справедливо* $\left|z_s^i - z_s^j\right| \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$.

Доказательство. Рассмотрим такой номер *j,* что $\left\{z_t^j\right\}_{t=0}^{\infty} \subset [z_{\min}, \infty)$. Докажем, что тогда *j*=*N*; иными словами, существует *T* такое, что $z_T^1 < z_T^2 < \ldots < z_T^{N-1} < z_{\min}$. Доказательство от противного. Пусть для всех *t*≥*T* выполняется соотношение $z_{\min} < z_t^{N-1} < z_t^N$. Применяя лемму 2.1. и (3.4), получаем

$$\frac{z_{t+1}^{N-1} / z_t^{N-1}}{z_{t+1}^N / z_t^N} = \frac{\psi(z_t^{N-1})}{\psi(z_t^N)} < 1.$$

Следовательно,

$$\frac{z_{t+1}^{N-1}}{z_{t+1}^N} < \frac{z_t^{N-1}}{z_t^N} < \ldots < \frac{z_0^{N-1}}{z_0^N} < 1 \ ,$$

откуда следует

$$z_s^{N-1} / z_s^N \xrightarrow[s \to \infty]{} q < 1.$$

Далее будет удобно использовать следующее обозначение:

$$\{a_s\} \approx \{b_s\} \Leftrightarrow \left|a_s - b_s\right| \xrightarrow[s \to \infty]{} 0.$$

В этих обозначениях $\left\{z_s^{N-1}\right\} \approx \left\{q z_s^N\right\}$. Поскольку $z_{t+1}^{N-1} = \varphi(z_t^{N-1}) \big/ (1+n_t)$ для любого *t*, то

$$\left\{q z_{s+1}^N\right\} \approx \left\{\frac{\varphi(q z_s^N)}{1+n_s}\right\}$$

и

$$\left\{\varphi(q z_s^N)\right\} \approx \left\{q \varphi(z_s^N)\right\}.$$

Следовательно,

$$\left\{\frac{\varphi(q z_s^N)}{q z_s^N}\right\} \approx \left\{\frac{\varphi(z_s^N)}{z_s^N}\right\}.$$

А так как $z_{\min} < z_t^{N-1} < z_t^N$, то получаем

$$\left|z_s^N - z_s^{N-1}\right| \xrightarrow[s \to \infty]{} 0.$$

Это противоречит предположению о том, что q<1.
Итак, справедливо следующее утверждение: существует не более одного *j* такого, что $z_t^j > z_{\min}$ для всех *t*, начиная с некоторого, и если такое *j* существует, то *j*=*N*.

Теперь докажем, что если для некоторого *t* выполняется неравенство $z_t^i < z_{\min}$, то это неравенство будет выполняться всегда в последующем. Действительно, если для некоторого *t* выполняется неравенство $z_t^i < z_{\min}$, то

$$z_{t+1}^i = \frac{k\varphi(z_t^i)}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\varphi(z_t^j)} < k\frac{\varphi(z_t^i)}{\varphi(k)} < z_{\min}\frac{\varphi(z_t^i)}{\varphi(z_{\min})} < z_{\min},$$

т.е. $z_{t+s}^i < z_{\min}$ для любого $s \geq 1$.

Таким образом, первая часть леммы доказана. Осталось доказать, что

$$\left|z_s^i - z_s^j\right| \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

Действительно, для любых $i< j<N$ в силу первой части существует момент времени T, такой что при $t>T$ выполняется $z_t^i < z_t^j < z_{\min}$. Используя (3.4), и лемму 2.1 получаем:

$$\frac{z_{t+1}^i \big/ z_t^i}{z_{t+1}^j \big/ z_t^j} = \frac{\psi(z_t^i)}{\psi(z_t^j)} > 1.$$

Следовательно,

$$z_{t+1}^i / z_{t+1}^j > z_t^i / z_t^j \text{ и } z_s^i / z_s^j \xrightarrow[s\to\infty]{} q \leq 1.$$

Поскольку $\left\{z_s^i\right\} \approx \left\{qz_s^j\right\}$, то применяя проведенное выше рассуждение, получим

$$\left\{\frac{\varphi(qz_s^j)}{qz_s^j}\right\} \approx \left\{\frac{\varphi(z_s^j)}{z_s^j}\right\},$$

что в сочетании с монотонностью $\psi(z)$ дает $q=1$, откуда немедленно следует

$$\left|z_s^i - z_s^j\right| \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

Предложение 3.2. *Пусть $\psi(z)$ относится ко II типу. Тогда для любой равновесной траектории $\left\{z_t^1, z_t^2, \ldots, z_t^N\right\}_{t=0}^{\infty}$, существует стационарное равновесие (n^*, z_l^*, z_h^*, σ^*) (возможно, неразделяющее), такое что справедливо*

$$z_t^N \xrightarrow[t\to\infty]{} z_h^*,\ z_t^j \xrightarrow[t\to\infty]{} z_l^*, \quad j = 1,\ldots,N-1.$$

Доказательство. Пользуясь результатами леммы 3.1, нам осталось показать, что существует хотя бы одно j такое, что последовательность $\left\{z_t^j\right\}_{t=0}^{\infty}$ сходится. Резюмируя все вышесказанное, $z_t^j < z_{\min}$ для всех $j=1,..,N-1$ начиная с некоторого t. Вследствие монотонности $\psi(z)$ на участке $[0,z_{\min}]$ выполняется $\psi(z_t^{N-1}) < \ldots < \psi(z_t^1)$. Для $\psi(z_t^N)$ существует три возможности

1. $\psi(z_t^N) < \psi(z_t^{N-1})$
2. $\psi(z_t^N) > \psi(z_t^1)$
3. $\psi(z_t^{N-1}) \leq \psi(z_t^N) \leq \psi(z_t^1)$

Рассмотрим каждую из них.

1. Если $\psi(z_t^N) < \psi(z_t^{N-1})$, то $\psi(z_t^N) < 1 + n_t < \psi(z_t^1)$. Тогда $z_{t+1}^1 > z_t^1$ и $z_{t+1}^N < z_t^N$, откуда следует

$$\psi(z_{t+1}^N) < 1 + n_t < \psi(z_{t+1}^1).$$

   - если $z_{t+1}^{N-1} > z_t^{N-1}$, то $\psi(z_t^{N-1}) > 1 + n_t$, следовательно, $\psi(z_{t+1}^{N-1}) > 1 + n_t$, но тогда $\psi(z_{t+1}^{N-1}) > \psi(z_{t+1}^N)$;
   - если $z_{t+1}^{N-1} < z_t^{N-1}$, тогда также $\psi(z_{t+1}^{N-1}) > \psi(z_{t+1}^N)$.

   Итак, $z_t^N > z_{t+1}^N > z_{t+2}^N > \ldots$ - монотонно убывающая последовательность, следовательно, имеет предел.
2. Случай $\psi(z_t^N) > \psi(z_t^1)$ рассматривается аналогично.
3. Пусть $\psi(z_t^{N-1}) \le \psi(z_t^N) \le \psi(z_t^1)$.

   Если для всех $s>t$ выполняется $\psi(z_s^{N-1}) \le \psi(z_s^N) \le \psi(z_s^1)$, то

$$z_t^{N-1} > z_{t+1}^{N-1} > z_{t+2}^{N-1} > \ldots, \text{ и } z_t^1 < z_{t+1}^1 < z_{t+2}^1 < \ldots.$$

   В противном случае существует $s>t$ такое, что одно из двух неравенств не выполняется, но тогда задача сводится к случаю 1. или 2.

Смысл теоремы 3.1. заключается в том, что в моделируемой экономике либо происходит выравнивание распределения национального богатства между всеми потребителями, либо происходит эндогенное деление общества на два класса: «бедные» и «богатые». Причем в класс «богатых» попадут лишь индивиды, принадлежащие самому состоятельному в начальный момент времени домохозяйству. Эти результаты тесно перекликаются с выводами работ Самуэльсона и Модильяни [15] и других авторов. Действительно, в обобщении теоремы Самуэльсона-Модильяни на случай с *M* капиталистами и *N* рабочими оказывается, что реализуются два режима: режим Пазинетти, когда остается один, самый богатый капиталист; и дуальный режим, когда все капиталисты исчезают и остаются только рабочие.

В заключение необходимо отметить, что доказав сходимость равновесных траекторий к стационарным равновесиям, тем не менее, мы не можем наверняка сказать, к какому из них они сходятся. В большой степени это определяется начальным состоянием.

Заключение

В данной работе была разработана АК-модель эндогенного роста с неоднородными агентами, чьи нормы сбережения определяются эндогенным образом в зависимости от размера текущего благосостояния индивида. Предполагается, что выполняется гипотеза об относительном богатстве, согласно которой индивид принимает решение о сбережениях, соотнося размер своего благосостояния со среднедушевым. Кроме того, мы считаем, что предельная склонность к сбережениям убывает с ростом относительного богатства агента. Нами была построена динамическая система, математическим образом описывающая разработанную модель, описаны ее равновесные траектории, доказано существование траекторий сбалансированного роста, определены стационарные равновесия, произведена их классификация. Показано, что стационарное равновесие может быть одного из двух типов: «неразделяющим», соответствующим эгалитарному распределению богатства; и «разделяющим». Разделяющее равновесие характеризуется наличием не более чем двух классов агентов: «богатые» и «бедные», при этом, в отличие от аналогичного результата в [3], сбережения «бедных» отличны от нуля. Было показано, что при одних и тех же параметрах возможно наличие бесконечного числа равновесий. Был проведен анализ устойчивости стационарных равновесий и асимптотических свойств равновесных траекторий модели. Была доказана теорема, что любая равновесная траектория сходится к одному из стационарных равновесий: разделяющему или неразделяющему. Были выявлены основные факторы, определяющие тип асимптотического поведения равновесных траекторий: это «репрезентативная» норма сбережений $S(1,1)$ и доля капитала в совокупном выпуске. Соотношение этих показателей определяет, к какому из равновесий, разделяющему или неразделяющему, сходится заданная равновесная траектория. Тем не менее, в ряде случаев ответ на этот вопрос существенным образом зависит от начальных условий. Полученные результаты дают возможность объяснить противоречивые мнения, сложившиеся относительно гипотезы о конвергенции: в одних случаях развитие экономики полностью определяется структурными параметрами модели, а в других – зависит от начального распределения богатства индивидов, и тогда ни о какой конвергенции, даже в слабой ее форме, говорить не приходится.

Литература.

1. Solow R. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of economics, 1956. Vol. 70, pp. 65-94.
2. Becker R. On the long-run steady state in a simple dynamic model of equilibrium with heterogeneous households // Quarterly Journal of Economics, 1980. Vol. 95, pp. 375-82.
3. Борисов К. Ю. Агрегированные модели экономического роста и распределения. – СПб: СПбЭМИ, 2005.
4. Andreoni, J., 1989, Giving with impure altruism: applications to charity and Ricardian equivalence, Journal of Political Economy, 96, 1447-1458
5. Caselli F., Ventura J. A Representative Consumer Theory of Distribution // The American Economic Review, 2000. Vol. 90, No.4, pp. 909-926.
6. Кейнс Дж.М. Общая теория занятости, процента и денег. М.: Прогресс, 1978.
7. Browning M., Lusardi A. Household Saving: Micro Theories and Macro Facts // Journal of Economic Literature, 1996. Vol. 34. pp. 1797-1885
8. Lusardi A. Permanent income, current income, and consumption: evidence from two data sets // Journal of Business and Economic Statistics, 1996. Vol. 14, pp. 81-90.
9. Carroll C. and Kimball M. On the concavity of the consumption function // Econometrica, 1996. Vol. 64, pp. 981-992.
10. Frankel M. The production function in allocation and growth: a synthesis // American Economic Review, 1962. Vol. 52, pp. 995-1022.
11. Romer P. M. Increasing Returns and Long-Run Growth // Journal of Political Economy, 1986. Vol.94. P. 1002 – 1037.
12. Cole H., Mailath G., Postlewaite A. Social norms, savings behavior, and growth // Journal of Political Economy, 1992. Vol. 100, pp. 1092-1125.
13. Schlicht E. A neoclassical theory of wealth distribution // Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistic, 1975. Vol. 189, № 1/2, pp. 78-96.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.
15. Samuelson P. and Modigliani F. The Pasinetti paradox in neoclassical and more general models // Review of Economic Studies, 1966. Vol. 33, pp. 269-30.

Подписано в печать 1.12.2008
Объем 1 п.л. Печать ризографическая. Тираж 100 экз.
Европейский университет в Санкт-Петербурге
191187 Санкт-Петербург, ул. Гагаринская, д. 3.