EUROPEAN
UNIVERSITY AT
SAINT-PETERSBURG

Кирилл Борисов

Александр Сурков

Пенсионная система в двухклассовой модели перекрывающихся поколений

Препринт Ec-02/08

Факультет экономики

Санкт-Петербург
2008

УДК 330.42
ББК 65В6

Борисов К.Ю., Сурков А.В. **Пенсионная система в двухклассовой модели перекрывающихся поколений:** препринт. – СПб., 2008. – 24 с.

В работе вводится в рассмотрение двухклассовая однопродуктовая модель экономического роста перекрывающихся поколений с возможностью наследования. Отличие капиталистов от работников состоит в том, что у первых выше коэффициент дисконтирования и/или доходность их сбережений. Для предложенной модели определяется понятие равновесия сбалансированного роста и доказывается его существование. В рамках модели анализируется накопительная и распределительная пенсионные системы.

Печатается по решению Ученого совета СПб ЭМИ РАН

Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ «Долгосрочные последствия пенсионной реформы: неравенство и экономический рост», проект № 08-02-00411а.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Модель перекрывающихся поколений (см., например, книгу [1]) широко применяется для анализа влияния на поведение экономических агентов государственного долга, пенсионных систем, налогообложения и других аспектов экономической политики. Традиционная форма модели, разработанная в классических работах [2,3], стала одной из самых популярных макроэкономических моделей. Более поздние существенные модификации модели связаны с учетом мотива наследования [4], оказывающегося существенным при обсуждении рикардианской эквивалентности в задачах о государственном долге, и разработкой моделей перекрывающихся поколений с неоднородными потребителями (см., например, [5]), открывшей принципиально новые возможности по исследованию вопросов неравенства и распределения.

В настоящей работе развивается модель, в которой имеется два типа потребителей, в соответствии с классической традицией называемые капиталистами и работниками. Основное предположение предлагаемой модели состоит в том, что у капиталистов выше (или, по крайней мере, не ниже), чем у работников, межпоколенческий коэффициент дисконтирования и/или доходность сбережений. Тем самым, данная модель является обобщением аналогичной модели, представленной в [5], где предполагалось, что капиталисты отличаются от работников межпоколенческим коэффициентом дисконтирования. Разница в доходности сбережений работников и капиталистов отражает уровень развитости и эффективности (точнее, неразвитости и неэффективности) финансовой системы, переводящей сбережения в инвестиции. Надо подчеркнуть, что даже при самом высоком уровне развития финансовой системы разница между доходностью сбережений капиталистов и работников не может полностью сойти на нет.

Мы будем исследовать устройство стационарных равновесий. Кроме того, будет проведен анализ сравнительной статики, призванный отразить влияние распределительной пенсионной системы на благосостояние капиталистов и работников.

В предлагаемой модели каждый потребитель живет два периода времени. На стыке первого и второго периода его жизни у него появляется $1+n$ наследников. Каждая из двух групп населения составляет некоторую фиксированную долю населения, причем наследники капиталиста будут капиталистами, а наследники работника – работниками, то есть деление на различные группы населения является в нашей модели экзогенным. Далее все переменные, относящиеся к капиталистам, будут отмечаться с помощью индекса h, а переменные, относящиеся к работникам, – с помощью индекса l. Наш анализ будет проводиться в рамках крайне сильного предположения о том, что в внутри каждого класса экономические агенты абсолютно идентичны и все время находятся в одинаковом положении.

1. ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Рассмотрим потребителя (вне зависимости от того, является ли он работником или капиталистом), появившегося на свет в момент времени t и получившего к концу периода t свою долю $X_t/(1+n)$ возможного наследства родителей, равного $X_t \geq 0$. В первый период своей жизни он является обладателем одной единицы рабочей силы, за которую получает в конце периода t заработную плату W_t. Предположим, что в момент $t+1$ он получает некоторый трансферт Ψ_t, который, вообще говоря, может быть и отрицательным (в этом случае он становится платежом). Таким образом, к моменту времени $t+1$ его богатство составляет величину

$$\Omega_t = W_t + \frac{X_t}{1+n} + \Psi_t.$$

Какую-то часть этого богатства, которая обозначается как C_t, индивид тратит на потребление, а оставшуюся часть в размере $S_t = \Omega_t - C_t$ он сберегает. Во второй период своей жизни (период $t+1$) рассматриваемый потребитель не работает и к концу этого периода его богатство равно

$$R_{t+1} S_t + \Phi_{t+1},$$

где $R_{t+1} = 1+\rho_{t+1}$, ρ_{t+1} – действующая в интервале времени между моментами $t+1$ и $t+2$ (в периоде $t+1$) доходность его сбережений, а Φ_{t+1} –

трансферт, который он получает в момент t+2 (на который тоже не накладывается предположение о неотрицательности). Это богатство делится на потребление D_{t+1} и оставляемое наследство X_{t+1}. Итак, потребитель, родившийся в период t и получивший в конце этого периода наследство $X_t/(1+n)$, имеет следующие бюджетные ограничения:

$$C_t + S_t = W_t + \frac{X_t}{1+n} + \Psi_t, \quad D_{t+1} + X_{t+1} = R_{t+1}S_t + \Phi_{t+1}.$$

Кроме того, оставляемое наследство должно быть неотрицательным: $X_{t+1} \geq 0$.

Родители проявляют альтруизм по отношению к своим детям. Они учитывают благосостояние детей (и всех дальнейших потомков) в своей целевой функции. Предположим, что полезность, которую потребитель извлекает из своего собственного потребления, определяется с помощью функции полезности

$$U(C, D) = u(C) + \beta u(D),$$

где C – это потребление в первый период жизни, D – потребление во второй период жизни, а функция $u(\cdot)$ удовлетворяет естественным условиям – является непрерывной, монотонно возрастающей, строго вогнутой и дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbf{R}_+$, причем $u'(0) = \infty$. Предположим также, что межпоколенческий коэффициент дисконтирования потребителя равен $\gamma \in (0,1)$. Тем самым задача, которую решает потребитель, родившийся в момент t, в случае, когда он получил наследство в размере $\bar{X}_t \geq 0$, устроена следующим образом:

$$\sum_{\theta=t}^{\infty} \gamma^{\theta-t} \left[u(C_\theta) + \beta u(D_{\theta+1}) \right] \to \max$$

$$\begin{cases} X_t \leq \bar{X}_t \\ C_\theta + S_\theta \leq W_\theta + \dfrac{X_\theta}{1+n} + \Psi_\theta \\ D_{\theta+1} + X_{\theta+1} \leq R_{\theta+1} S_\theta + \Phi_{\theta+1} \\ X_\theta \geq 0, \quad \theta = t, t+1, \ldots \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что решение данной задачи существует. В этом случае последовательность $\left(C_\theta, D_{\theta+1}, S_\theta, X_\theta\right)_{\theta=t,t+1,\ldots}$ является решением данной задачи оптимизации (оптимумом потребителя) только тогда, когда для нее при всех $\theta = t, t+1, \ldots$ выполнены условия

$$\begin{cases} X_t = \bar{X}_t \\ C_\theta + S_\theta = W_\theta + \dfrac{X_\theta}{1+n} + \Psi_\theta \\ D_{\theta+1} + X_{\theta+1} = R_{\theta+1} S_\theta + \Phi_{\theta+1} \\ u'\left(C_\theta\right) = \beta R_{\theta+1} u'\left(D_{\theta+1}\right) \\ \gamma u'\left(C_\theta\right) \le \beta\left(1+n\right) u'\left(D_\theta\right) \\ X_\theta > 0 \Rightarrow \gamma u'\left(C_\theta\right) = \beta\left(1+n\right) u'\left(D_\theta\right) \end{cases}$$

Указанные необходимые условия становятся достаточными, если их дополнить условием трансверсальности, в данном случае имеющим вид

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma^t u'\left(C_t\right) X_t = 0$$

Подробнее об условиях трансверсальности см. [1].

2. ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ ОПТИМУМ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА

Далее мы будем интересоваться траекториями сбалансированного роста. Предположим, что заработная плата W_t, и размеры трансфертов растут с темпом λ, а доходность сбережений ρ_t не меняется с течением времени

$$\frac{W_t}{A_t} = w > 0, \quad R_t \equiv 1 + \rho_t = R > 0, \quad \frac{\Psi_t}{A_t} = \psi, \quad \frac{\Phi_t}{A_t} = \phi, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

где обозначено $A_t = \left(1+\lambda\right)^t$.

Для определения потребительского оптимума сбалансированного роста мы ограничимся краткосрочными функциями полезности специального вида. Здесь и далее, мы будем предполагать, что краткосрочная функция полезности с точностью до монотонного преобразования имеет вид $u\left(C\right) = \ln C$. Однако, все полученные выводы будут также справедливы и для функции полезности с постоянной эластичностью межвременного замещения

$$u(C)=\frac{C^{1-\nu}-1}{1-\nu},\quad 0<\nu\neq 1$$

Назовем набор (c,d,s,x) является потребительским оптимумом сбалансированного роста, если последовательность $(C_\theta, D_{\theta+1}, S_\theta, X_\theta)_{\theta=t,t+1,\ldots}$, задаваемая при всех $\theta=t,t+1,\ldots$ равенствами

$$C_\theta = A_\theta c,\ D_{\theta+1}=A_{\theta+1}d,\ s_\theta = A_\theta s,\ X_\theta = A_\theta x,$$

является решением задачи (1) (оптимумом потребителя).

Сформулируем условия существования потребительского оптимума сбалансированного роста. Обозначим

$$c_\theta=\frac{C_\theta}{A_\theta},\ d_\theta=\frac{D_\theta}{A_\theta},\ s_\theta=\frac{S_\theta}{A_\theta},\ x_\theta=\frac{X_\theta}{A_\theta},\quad \theta=t,t+1,\ldots$$

и, учитывая выбранный вид краткосрочной функции полезности, перепишем задачу (1) в виде

$$\sum_{\theta=t}^{\infty}\gamma^{\theta-t}\left[u(c_\theta)+\beta u(d_{\theta+1})\right]\to\max$$

$$\begin{cases} c_\theta + s_\theta \le w_\theta + \dfrac{x_\theta}{1+n}+\psi, \\ d_{\theta+1}+x_{\theta+1}\le \dfrac{Rs_\theta}{1+\lambda}+\phi, \\ x_\theta \ge 0,\quad \theta=t,t+1,\ldots, \\ x_t \le \overline{x}_t \end{cases} \tag{2}$$

Тогда, набор (c,d,s,x) является потребительским оптимумом сбалансированного роста, если последовательность $(c_\theta, d_{\theta+1}, s_\theta, x_\theta)_{\theta=t,t+1,\ldots}$, задаваемая при всех $\theta=t,t+1,\ldots$ равенствами

$$c_\theta=c,\quad d_{\theta+1}=d,\quad s_\theta=s,\quad x_\theta=x,$$

является решением задачи (2). Необходимые и достаточные условия для этого имеют вид

$$\begin{cases} c+s=w+\dfrac{x}{1+n}+\psi, \quad d+x=\dfrac{Rs}{1+\lambda}+\phi \\ u'(c)=\dfrac{\beta R}{1+\lambda}u'(d) \\ \gamma u'(c)\le\beta(1+n)u'(d) \\ x>0\Rightarrow\gamma u'(c)=\beta(1+n)u'(d) \end{cases}$$

Если $\gamma>\dfrac{1+\tilde{n}}{R}$, где $\tilde{n}=(1+n)(1+\lambda)-1$, то гарантировать существование решения у задачи (2) нельзя. А если $\gamma\le\dfrac{1+\tilde{n}}{R}$, то решение обязательно существует. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Предложение 1

1. Потребительский оптимум сбалансированного роста существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\gamma\le\dfrac{1+\tilde{n}}{R}$.
2. Если $\gamma<\dfrac{1+\tilde{n}}{R}$, то потребительский оптимум сбалансированного роста (c^*,d^*,s^*,x^*) однозначным образом задается следующими условиями:
   - $x^*=0$;
   - (c^*,d^*) является решением задачи
   $$u(c)+\beta u(d)\to\max$$
   $$c+\frac{1+\lambda}{R}d=w+\psi+\frac{1+\lambda}{R}\phi$$
   - $s^*=w+\psi-c^*$
3. Если же $\gamma=\dfrac{1+\tilde{n}}{R}$, то потребительским оптимумом сбалансированного роста будет *любой* набор (c^*,d^*,s^*,x^*), удовлетворяющий следующим условиям:
   - $x^*\ge 0$;
   - (c^*,d^*) является решением задачи

$$u(c)+\beta u(d)\to \max$$

- $$c+\frac{1+\lambda}{R}d=w+\psi+\frac{1+\lambda}{R}\phi+\frac{\rho-\tilde{n}}{(1+n)R}x^*$$
- $$s^*=w+\frac{x^*}{1+n}+\psi-c^*.$$

Итак, если $\gamma<\dfrac{1+\tilde{n}}{R}$, то в состоянии потребительского оптимума сбалансированного роста размер наследства обязательно равен нулю (мотив наследования не действует). Уровень потребления на единицу эффективного труда в первый и второй периоды жизни, c^* и d^* соответственно, а также значение полезности $u\left(A_t c^*\right)+\beta u\left(A_t d^*\right)$, которую потребитель извлекает из своего собственного потребления в состоянии оптимума, однозначно определяются при фиксированных значениях доходности сбережений ρ и ставки заработной платы на единицу эффективного труда w. Если же $\gamma=\dfrac{1+\tilde{n}}{R}$, то оптимум сбалансированного роста возможен при любом неотрицательном значении x^*, причем различным значениям x^* соответствуют различные значения $c^*, d^*, u\left(A_t c^*\right)+\beta u\left(A_t d^*\right), s^*$. Очевидно, что с ростом x^* будет увеличиваться значение величины $u\left(A_t c^*\right)+\beta u\left(A_t d^*\right)$. А поскольку потребление, как в первый, так и во второй период времени, является нормальным благом, то с ростом x^* будет увеличиваться и c^*, и d^*. Кроме того, как легко проверить, справедливо равенство

$$s^*=\frac{1+\lambda}{R}d+\frac{1+\tilde{n}}{(1+n)R}x^*.$$

А отсюда следует, что s^* тоже зависит от x^* монотонно возрастающим образом.

3. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ СЕКТОР

Будем предполагать, что производственный сектор описывается неоклассической производственной функцией $F(K, AL)$, где K – запас основного капитала в экономике, L – численность занятых, и характеризуется совершенной конкуренцией на всех рынках. Величина A описывает нейтральный по Харроду технический прогресс с темпом λ. Будем предполагать, что $A_0 = 1$, и тогда $A_t = (1+\lambda)^t$.

При условии полного выбытия капитала за рассматриваемый период времени условия равновесия на рынках капитала и труда имеют вид

$$r = F_1'(K, AL) - 1, \quad W = AF_2'(K, L).$$

где r – равновесная норма прибыли, а W – ставка заработной платы. Индексы $F_{1,2}'(\cdot,\cdot)$ означают производную по соответствующему аргументу.

Введем капиталовооруженность эффективного труда $k = K/(AL)$ и производственную функцию в интенсивной форме

$$f(k) = F(k,1) = \frac{1}{AL} F(K, AL),$$

которую будем считать дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbf{R}_+$, монотонно возрастающей и строго вогнутой, причем $f(0) = 0$. Тогда, условия равновесия на рынках труда и капитала можно переписать в виде

$$r = f'(k) - 1, \quad w = \frac{W}{A} = \left[f(k) - k f'(k) \right],$$

где w – заработная плата на единицу эффективного труда.

4. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Теперь пора уточнить, чем отличается капиталист от работника. Во-первых, предполагается, что могут отличаться их коэффициенты дисконтирования, а во-вторых, может различаться доходность их сбережений.

Что касается коэффициентов дисконтирования, то межпоколенческий коэффициент дисконтирования капиталистов, который обозначается через γ_h, не меньше, а может даже и больше коэффициента дисконтирования работников γ_l: $\gamma_l \le \gamma_h$.. Персональные коэффициенты дисконтирования капиталистов и работников (β_h и β_l) тоже могут различаться. Наше предположение о том, что межпоколенческий коэффициент дисконтирования капиталистов может быть выше межпоколенческого коэффициента дисконтирования работников, неявно опирается на гипотезу о том, что капиталисты богаче работников. В случае, когда различие между капиталистами и работниками исчерпывалось бы различием в коэффициентах дисконтирования, первых корректнее было бы называть просто «богатыми», а вторых – «бедными».

Заметим, что даже если выполняется неравенство $\gamma_l < \gamma_h$, оно совсем необязательно означает, что работники менее альтруистичны, чем капиталисты. Если $\beta_h > \beta_l$, то вполне возможно, что одновременно выполняется и неравенство $\gamma_l \le \gamma_h$, и неравенство

$$\frac{\gamma_h}{(1+n)\beta_h} < \frac{\gamma_l}{(1+n)\beta_l},$$

которое можно интерпретировать как знак того, что степень альтруистичности работников больше, чем степень альтруистичности капиталистов.

Кроме того, мы делаем различие между нормой прибыли и ставкой процента. Для реальных рыночных экономик равенство ставки процента и нормы прибыли не является типичным, норма прибыли обычно примерно раза в два выше ставки процента. Мы будем интерпретировать величину $r = f'(k) - 1$ как равновесную норму прибыли, в то время как равновесную ставку процента будем считать равной $(1-\Theta)r$, где $\Theta \in [0,1]$ – экзогенно заданный параметр. Разница между нормой прибыли и ставкой процента в предлагаемой модели состоит в следующем. Предполагается, что всем производственным капиталом управляют капиталисты. Какая-то доля капитала принадлежит капиталистам в полной мере (она профинансирована за счет их сбережений), а какая-то доля прокредитована работниками. Доходность производственного капитала (сбережений капиталистов) равна норме прибыли, а доходность сбережений работников – ставке процента. Тем самым, если $\Theta > 0$, то в доход капиталистов входит не только доход на капитал, который им принадлежит, но и часть дохода на капитал, профинансированная работниками (в той мере, в какой ставка процента меньше нормы прибыли). Если Θ=0, то ставка процента и норма прибыли – это одно и то же.

Мы будем интерпретировать Θ как параметр, отражающий степень неэффективности финансовой системы, которая позволяет превращать сбережения работников в инвестиции (сбережения капиталистов превращаются в инвестиции без затрат). Функционирование финансовой системы с неизбежностью требует тех или иных затрат и вложений. Эти вложения, как и любые другие вложения, должны приносить некоторый доход. Естественно предполагать, что финансовые компании и банки принадлежат капиталистам. В этом случае доходность этих вложений должна быть такой же, как и в реальном секторе, т.е. совпадать с нормой прибыли. Это рассуждение можно было бы смоделировать в явном виде. Однако мы этого делать не будем, а только отметим, что если для финансового сектора экономики норма прибыли является экзогенным параметром, то чем выше затраты в финансовом секторе, тем больше значение параметра Θ.

В случае, когда $\gamma_l = \gamma_h$ и $\Theta = 0$, наша модель сводится по существу к модели Барро [4], но далее мы будем предполагать, что выполняется хотя бы одно из следующих неравенств: $\gamma_l < \gamma_h$ или $\Theta > 0$.

Мы будем считать, что дети наследуют классовую принадлежность родителей. Поэтому доля капиталистов в населении, которая обозначается как σ, не меняется во времени, точно так же, как и доля работников, равная $1-\sigma$. Напомним, что население в момент t равно $L_t = (1+n)^t L_0$. Следовательно, количество капиталистов в момент t равно $\sigma L_t = \sigma(1+n)^t L_0$, а количество работников равно $(1-\sigma) L_t = (1-\sigma)(1+n)^t L_0$.

5. РАВНОВЕСНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Целью нашего анализа являются равновесия сбалансированного роста. Однако сначала дадим общее определение равновесной траектории для нашей модели, причем сделаем это в предположении о том, что в начальный момент времени все капиталисты находятся в одинаковом состоянии, и все работники находятся в одинаковом состоянии. Из этого следует, что и с течением времени различий между двумя различными капиталистами и двумя различными работниками не появится.

Предположим, что нам задано начальное состояние $\left(K_0, L_0, X_{h0}, X_{l0}\right)$, где $K_0 > 0$, $L_0 > 0$, $X_{h0} \ge 0$, $X_{l0} \ge 0$. *Равновесной траекторией*, исходящей из этого состояния называется последовательность

$$\left[\left(K_t, L_t\right), R_t, W_t, \left(C_{ht}, S_{ht}, D_{ht+1}, X_{ht+1}\right), \left(C_{lt}, S_{lt}, D_{lt+1}, X_{lt+1}\right)\right]_{t=0,1,\ldots},$$

которая удовлетворяет для всех t=0,1,… следующим соотношениям:

1. $0 = F\left(K_t, L_t\right) - R_t K_t + W_t L_t \ge F\left(K, L\right) - R_t K + W_t L \quad \forall K \ge 0, L \ge 0$
2. $\left(C_{ht}, S_{ht}, D_{ht+1}, X_{ht+1}\right)_{t=0,1,\ldots}$ является при

$$\beta = \beta_h, \gamma = \gamma_h, R_t = 1 + r_t, k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}},$$

$$\Psi_t = 0, \Phi_{t+1} = \Theta r_{t+1} \left[\frac{\left(1+n\right) A_{t+1} k_{t+1}}{\sigma} - S_{ht}\right]$$

решением задачи (1);

3. $\left(C_{lt}, S_{lt}, D_{lt+1}, X_{lt+1}\right)_{t=0,1,\ldots}$ является при

$$\beta = \beta_l, \gamma = \gamma_l, R_t = 1 + \left(1 - \Theta\right) r_t, \;\; \Psi_t = 0, \Phi_{t+1} = 0$$

решением задачи (1);

4. $K_{t+1} = \left[\sigma S_{ht} + \left(1 - \sigma\right) S_{lt}\right] L_t$.

Прокомментируем данное определение. Условие 1 является традиционным и говорит о том, что производственный сектор экономики максимизирует экономическую прибыль, причем «ценой» капитала является установившееся в экономике норма прибыли (она будет совпадать со ставкой процента в случае $\Theta = 0$). Условия 2 и 3 говорят о том, что каждый потребитель решает свою задачу потребителя в том виде, как мы описали ее выше. Нужно только отметить, что доходность сбережений капиталистов в каждом периоде t равна норме прибыли r_t, а доходность сбережений работников равна ставке процента $\left(1 - \Theta\right) r_t$. Заметим, что поскольку работники кредитуют капиталистов по ставке процента, которая меньше нормы прибыли (при $\Theta > 0$), то некоторая часть прибыли на капитал, который приобретен за счет кредитов работников, попадает в бюджет капиталистов. Суммарный размер капитала, приобретенный капиталистами за счет кредитов работников, в момент t+1 равен $(1-\sigma)S_{lt}L_t$, а прибыль, полученная на этот капитал в периоде t+1, равна $r_{t+1}(1-\sigma)S_{lt}L_t$. Часть этой прибыли в размере $\Theta r_{t+1}(1-\sigma)S_{lt}L_t$ достается капиталистам и делится между ними поровну (по предположению). Тем самым, каждый отдельный капиталист (родившийся в момент времени t) в свой бюджет получит в дополнение к наследству и заработной плате еще и некоторую сумму в размере

$$\Phi_{t+1} = \frac{\theta r_{t+1}(K_{t+1} - \sigma S_{ht} L_t)}{\sigma L_t} = \Theta r_{t+1}\left[\frac{(1+n)A_{t+1}k_{t+1}}{\sigma} - S_{ht}\right] = \frac{1-\sigma}{\sigma}\Theta r_{t+1} S_{lt},$$

причем произойдет это в конце периода t+1, т.е. в момент t+2.

Условие 4 говорит о том, что в каждый момент времени имеет место равновесие на рынке капитала (рынке заемных средств). А именно, размер капитала равен суммарным сбережениям капиталистов и работников. Хотя и не явно, требование равновесия на рынке труда тоже присутствует в данном нами определении равновесной траектории.

6. РАВНОВЕСИЯ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА

Равновесной траекторией сбалансированного роста (или стационарной равновесной траекторией) естественно назвать такую равновесную траекторию

$$\left[(K_t, L_t), R_t, W_t, (C_{ht}, S_{ht}, D_{ht+1}, X_{ht+1}), (C_{lt}, S_{lt}, D_{lt+1}, X_{lt+1})\right]_{t=0,1,\ldots},$$

на которой все удельные (на единицу эффективного труда) величины, а также норма прибыли и ставка процента не меняются во времени.

Состоянием *равновесия сбалансированного роста* называется набор $\left[k^*, r^*, w^*, (c_h^*, d_h^*, s_h^*, x_h^*), (c_l^*, d_l^*, s_l^*, x_l^*)\right]$, где k^*>0, который удовлетворяет следующим условиям:

1. выполняются условия максимизации прибыли;

2. $\left(c_h^*, d_h^*, s_h^*, x_h^*\right)$ является потребительским оптимумом сбалансированного роста при

$$\beta = \beta_h, \gamma = \gamma_h, w = w^*, R_t = 1 + r^*, \psi = 0, \phi = \Theta r^* \left[\frac{(1+n)k^*}{\sigma} - \frac{s_h}{1+\lambda}\right];$$

3. $\left(c_l^*, d_l^*, s_l^*, x_l^*\right)$ является стационарным оптимумом потребителя при $\beta = \beta_l, \gamma = \gamma_l, w = w^*, R_t = 1 + r^*, \psi = 0, \phi = 0;$
4. $(1+\tilde{n})k^* = \sigma s_h^* + (1-\sigma)s_l^*$

Заметим, что в состоянии равновесия выполняется материальный баланс:

$$(1+\tilde{n})k^* + \sigma\left(c_h^* + \frac{d_h^*}{1+n}\right) + (1-\sigma)\left(c_l^* + \frac{d_l^*}{1+n}\right) =$$

$$= w^* + \frac{\sigma}{1+n}\left(\frac{1+r^*}{1+\lambda}s_h^* + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta r^*}{1+\lambda}s_l^*\right) + \frac{1-\sigma}{1+n}\frac{1+(1-\Theta)r^*}{1+\lambda}s_l^* = w^* + R^* k^* = f\left(k^*\right)$$

Как обычно, первым вопросом, которым задается исследователь, после того как вводит некоторое понятие равновесия, является вопрос о его существовании и устройстве. Оказывается, что в нашей модели равновесие обязательно существует, если выполняется понятное неравенство $f'(0) > 1+n$, что и будем далее предполагать.

С учетом Предложения 1 для любого состояния равновесия $\left[k^*, r^*, w^*, \left(c_h^*, d_h^*, s_h^*, x_h^*\right), \left(c_l^*, d_l^*, s_l^*, x_l^*\right)\right]$ выполняются следующие неравенства:

$$\gamma_l \le \gamma_h \le \frac{1+\tilde{n}}{1+r^*} \le \frac{1+\tilde{n}}{1+(1-\Theta)r^*}$$

Поскольку $\gamma_l \le \gamma_h$ и/или $\Theta > 0$, хотя бы одно из этих неравенств выполняется как строгое. Следовательно, $\gamma_l < \dfrac{1+\tilde{n}}{1+(1-\Theta)r^*}$. Тем самым из Предложения 1 следует, что $x_l^* = 0$.

Итак, в состоянии равновесия работники наследства не оставляют. Что касается капиталистов, то возможной представляется как ситуация, когда $x_h^* > 0$, так и ситуация, когда $x_h^* = 0$.

Определим функции $s_i\left(w,\psi,\phi,\rho,x\right),\quad i=l,h$ посредством равенства

$$s_i\left(w,\psi,\phi,\rho,x\right)=\arg\max_s\left\{u\left(w+\psi+\frac{x}{1+n}-s\right)+\beta_i u\left(\frac{1+\rho}{1+\lambda}s+\phi-x\right)\right\}$$

и рассмотрим вопрос о том, может ли равновесие быть устроено таким образом, что наследство, оставляемое капиталистами, положительно. Из Предложения 1 вытекает, что в этом случае состоянием равновесия должен быть набор $\hat{\Sigma}=\left[\hat{k},\hat{r},\hat{w},\left(\hat{c}_h,\hat{d}_h,\hat{s}_h,\hat{x}_h\right),\left(\hat{c}_l,\hat{d}_l,\hat{s}_l,\hat{x}_l=0\right)\right]$, задаваемый следующими условиями:

1. $\hat{r}$ – это решение уравнения $\gamma_h=\dfrac{1+\tilde{n}}{1+r}$ относительно *r*;
2. $\hat{k}$ является решением уравнения $r(k)=\hat{r}$ относительно *k*;
3. $\hat{w}=w\left(\hat{k}\right)$;
4. набор $\left(\hat{c}_l,\hat{d}_l,\hat{s}_l,\hat{x}_l=0\right)$ является потребительским оптимумом сбалансированного роста при
$$\beta=\beta_l,\ \gamma=\gamma_l,\ w=\hat{w},\ \rho=\left(1-\Theta\right)\hat{r},\ \psi=0,\ \phi=0;$$
5. $\left(\hat{c}_h,\hat{d}_h,\hat{s}_h,\hat{x}_h\right)$ является потребительским оптимумом сбалансированного роста при
$$\beta=\beta_h,\ \gamma=\gamma_h,\ w=\hat{w},\ \rho=\hat{r},\ \psi=0,\ \phi=\Theta\hat{r}\left[\frac{\left(1+n\right)\hat{k}}{\sigma}-\frac{\hat{s}_h}{1+\lambda}\right];$$
6. $\left(1+\tilde{n}\right)\hat{k}=\sigma\hat{s}_h+\left(1-\sigma\right)\hat{s}_l$.

Если такой набор существует, то он обязательно является состоянием равновесия. Однако он может и не существовать. Легко заметить, что необходимым и достаточным условием его существования является выполнение неравенства

$$\begin{aligned}\left(1+\tilde{n}\right)\hat{k}\ge\sigma s_h&\left\{\hat{w},0,\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta\hat{r}}{1+\lambda}s_l\left[\hat{w},0,0,\left(1-\Theta\right)\hat{r},0\right],\hat{r},0\right\}+\\&+\left(1-\sigma\right)s_l\left[\hat{w},0,0,\left(1-\Theta\right)\hat{r},0\right]\end{aligned}\qquad(3)$$

при $\hat{k}$, $\hat{r}$ и $\hat{w}$, задаваемых соотношениями 1-3.

Неравенство (3) имеет естественную интерпретацию. В случае, когда оно выполняется как строгое (и только в этом случае), наследство, оставляемое капиталистами, положительно, поскольку мотив жизненного цикла не обеспечивает того количества сбережений, которые необходимы для поддержания капиталовооруженности на уровне $\hat{k}$. Необходимо, чтобы был задействован еще и мотив наследования капиталистов. Более точно, несложно проверить, что

$$s_h\left\{\hat{w},0,\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta\hat{r}}{1+\lambda}s_l\left[\hat{w},0,0,(1-\Theta)\hat{r},0\right],\hat{r},x\right\}\to\infty,\quad x\to\infty.$$

Тем самым, существует такое $\hat{x}_h$, что

$$(1+\tilde{n})\hat{k}=\sigma s_h\left\{\hat{w},0,\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta\hat{r}}{1+\lambda}s_l\left[\hat{w},0,0,(1-\Theta)\hat{r},0\right],\hat{r},\hat{x}_h\right\}+$$
$$+(1-\sigma)s_l\left[\hat{w},0,0,(1-\Theta)\hat{r},0\right].$$

Если неравенство (3) не выполняется, т.е.

$$(1+\tilde{n})\hat{k}<\sigma s_h\left\{\hat{w},0,\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta\hat{r}}{1+\lambda}s_l\left[\hat{w},0,0,(1-\Theta)\hat{r},0\right],\hat{r},0\right\}+$$
$$+(1-\sigma)s_l\left[\hat{w},0,0,(1-\Theta)\hat{r},0\right],$$

то обязательно существует равновесие, в котором наследство, оставляемое капиталистами, равно нулю, как и наследство работников. Действительно, как легко проверить, при достаточно больших k выполняется неравенство

$$(1+\tilde{n})k>\sigma s_h\left\{w(k),0,\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta r(k)}{1+\lambda}s_l\left[w(k),0,0,(1-\Theta)r(k),0\right],r(k),0\right\}+$$
$$+(1-\sigma)s_l\left[w(k),0,0,(1-\Theta)r(k),0\right].$$

Следовательно, найдется $\tilde{k}>\hat{k}$, для которого

$$(1+\tilde{n})\tilde{k}=\sigma s_h\left\{w(\tilde{k}),0,\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta r(\tilde{k})}{1+\lambda}s_l\left[w(\tilde{k}),0,0,(1-\Theta)r(\tilde{k}),0\right],r(\tilde{k}),0\right\}+$$
$$+(1-\sigma)s_l\left[w(\tilde{k}),0,0,(1-\Theta)r(\tilde{k}),0\right].$$

А это значит, что состоянием равновесия является набор $\tilde{\Sigma}=\left[\tilde{k},\tilde{r},\tilde{w},\left(\tilde{c}_h,\tilde{d}_h,\tilde{s}_h,\tilde{x}_h=0\right),\left(\tilde{c}_l,\tilde{d}_l,\tilde{s}_l,\tilde{x}_l=0\right)\right]$, задаваемый следующими соотношениями:

$$\tilde r = r\left(\tilde k\right),\quad \tilde w = \tilde w\left(\tilde k\right),\quad \tilde s_l = s_l\left[w\left(\tilde k\right),0,0,\left(1-\Theta\right)r\left(\tilde k\right),0\right],$$

$$\tilde c_l = \tilde w - \tilde s_l,\quad \tilde d_l = \frac{1+\left(1-\Theta\right)\tilde r}{1+\lambda}\tilde s_l,$$

$$\tilde s_h = s_h\left\{\tilde w, 0, \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta\tilde r}{1+\lambda}s_l\left[\tilde w,0,0,\left(1-\Theta\right)\tilde r,0\right],\tilde r,0\right\},$$

$$\tilde c_h = \tilde w - \tilde s_h,\quad \tilde d_l = \frac{1+\tilde r}{1+\lambda}\tilde s_h + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta\tilde r}{1+\lambda}\tilde s_l.$$

Теперь можно подытожить наше рассуждение, сформулировав следующее предложение.

Предложение 2

1. В рассматриваемой модели при сделанных предположениях состояние равновесия существует, причем в любом равновесии наследство, оставляемое работниками, равно нулю.
2. Если для $\hat k : \gamma_h = 1+\tilde n\big/\left[1+r\left(\hat k\right)\right]$, выполняется неравенство (3), то соответствующий набор $\hat\Sigma$ является состоянием равновесия; причем если (3) выполняется как строгое неравенство, то в этом состоянии равновесия наследство, оставляемое капиталистами, положительно.
3. Если для $\hat k$ неравенство (3) не выполняется, то найдется такое $\tilde k > \hat k$, что соответствующий набор $\tilde\Sigma$ является состоянием равновесия, в котором наследство капиталистов равно нулю.

7. О НАКОПИТЕЛЬНОЙ И РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ПЕНСИОННЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим вопрос о том, какое влияние на состояние равновесия окажет введение пенсионного обеспечения для работников. Обычно рассматривают две системы пенсионного обеспечения: распределительную и накопительную.

Предположим, что в нашу модель вводится накопительная система. Будем считать, что она касается только работников. Предположим, что работник, родившийся в некоторый момент времени *t*, не получает и не оставляет никакого наследства. Если его зарплата, которую он получит в момент t+1, равна W_t, а норма прибыли в периоде t+1 равна r_{t+1}, то бюджетное ограничение работника имеет следующий вид:

$$C_t + \frac{D_{t+1}}{1+(1-\Theta)r_{t+1}} = W_t + \Psi_t + \frac{1}{1+(1-\Theta)r_{t+1}}\Phi_{t+1}$$

Пусть первый период своей жизни работник вносит свой вклад в пенсионный фонд в размере $a: \Psi_t = -a$, а во второй период жизни он получает пенсию в размере $\Phi_{t+1} = \left[1+(1-\Theta)r_{t+1}\right]a$. При этом имеется в виду, что пенсионный фонд осуществляет вложения по текущей ставке процента, а расходы на его содержание равны нулю. Как легко заметить, данное бюджетное ограничение ничем не отличается от бюджетного ограничения работника без социального страхования. Тем самым, можно заключить, что, как обычно, *введение в нашу модель накопительной системы пенсионного обеспечения не изменит состояния равновесия*. Если обязательная накопительная пенсионная система предусмотрена как для работников, так и для капиталистов, то ситуация не меняется. Пенсионный фонд инвестирует взносы капиталистов под ту же ставку процентов, что и взносы работников, но, при этом капиталисты получают трансферт, возникший из-за различия между ставкой процента и нормой прибыли.

Теперь предположим, что вводится распределительная система пенсионного обеспечения. Это будет означать, что индивид в первый период своей жизни вносит вклад в пенсионный фонд в размере $a: \Psi_t = -a$, а во второй период жизни он получает пенсию в размере $\Phi_{t+1} = (1+n)a$.

Отличие от накопительной системы состоит в том, что в данном случае пенсионный фонд никаких вложений не производит, а осуществляет трансферты от «молодого» поколения к «старшему» поколению. Отметим, что получаемая пенсия превосходит вложения в пенсионный фонд только за счет роста населения, ибо на одного представителя «старшего» поколения работников приходится (1+n) «молодых» работников. В данном случае естественным образом определяется равновесие сбалансированного роста. Оно определяется теми же соотношениями, что и определение равновесия сбалансированного роста без пенсионной системы с той лишь разницей, что трансферты работников задаются в размере

$$\psi = \psi_l = -a, \quad \phi = \phi_l = (1+n)a,$$

а трансферты капиталистов

$$\psi = -a, \quad \phi = (1+n)a + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\Theta r^*}{1+\lambda} s_l^*.$$

Рассмотрим вопрос о том, как повлияет введение распределительной пенсионной системы на равновесие сбалансированного роста $\left[k^*, r^*, w^*, \left(c_h^*, d_h^*, s_h^*, x_h^*\right), \left(c_l^*, d_l^*, s_l^*, x_l^*\right)\right]$, обозначив новое равновесие сбалансированного роста как $\left[k^{**}, r^{**}, w^{**}, \left(c_h^{**}, d_h^{**}, s_h^{**}, x_h^{**}\right), \left(c_l^{**}, d_l^{**}, s_l^{**}, x_l^{**}\right)\right]$.

В рамках исследования сравнительной статики, мы будем предполагать, что взнос *a* в пенсионную систему мал в следующем смысле:

1. $s_l^{**} > 0$, то есть взнос в пенсионную систему не столь велик, чтобы сделать сбережения работников отрицательными. Без пенсионной системы в равновесии сбережения работников оказываются положительными, что обеспечивает им положительный уровень потребления во второй период жизни. Однако при наличии пенсионной системы это требование может выполняться и при отрицательных сбережениях работников. При этом в рамках сделанных предположений окажется, что капиталисты субсидируют дешевые займы работников по ставке процента не превосходящей норму прибыли. Подробнее об эффектах, связанных с введением распределительной пенсионной системы при наличии рационирования кредита работникам – см. [6].
2. Если $x_h^* > 0$, то и $x_h^{**} > 0$, то есть если капиталисты оставляли наследство при отсутствии распределительной пенсионной системы, то они будут оставлять его и при наличии пенсионной системы – введение пенсионной системы не меняет тип равновесия в смысле Предложения 2.

Равновесные значения капиталовооруженности, ставки процента и ставки заработной платы не изменятся после введения пенсионной системы $k^* = k^{**}, r^* = r^{**}, w^* = w^{**}$, а вот благосостояние работников и капиталистов изменится. Действительно, пара $\left(c_l^*, d_l^*\right)$ является решением задачи

$$u(c) + \beta u(d) \to \max$$
$$c + \frac{1+\lambda}{R} d = w^*,$$

а пара $\left(c_l^{**}, d_l^{**}\right)$ – решением задачи

$$u(c) + \beta u(d) \to \max$$
$$c + \frac{1+\lambda}{1+(1-\Theta)r^*} d = w^* - a + \frac{1+\tilde{n}}{1+(1-\Theta)r^*} a$$

Отсюда следует, что, при $(1-\Theta)r^* > \tilde{n}$ благосостояние работников упадет, что приведет к падению потребления в первый и второй периоды жизни: $c_l^* > c_l^{**}, d_l^* > d_l^{**}$. При выполнении обратного неравенства $(1-\Theta)r^* < \tilde{n}$ благосостояние работников возрастет, и $c_l^* < c_l^{**}, d_l^* < d_l^{**}$. Таким образом, ключевым является соотношение между темпом роста эффективной рабочей силы $\tilde{n}$ и равновесным значением ставки процента $(1-\Theta)r^*$. Отметим, что при $\Theta = 0$ и $\gamma_l < \gamma_h$ выполняется неравенство $(1-\Theta)r^* > \tilde{n}$.

Что касается благосостояния капиталистов, можно видеть, что если благосостояние работников упало (возросло), то благосостояние капиталистов должно было вырасти (упасть). Действительно, пусть это не так. Например, если при введении пенсионной системы благосостояние работников на единицу эффективного труда вырастет вместе с благосостоянием капиталистов, то это приведет к тому, что $c_l^* > c_l^{**}, d_l^* > d_l^{**}$, $c_h^* > c_h^{**}, d_h^* > d_h^{**}$, а при этом не может выполняться равенство

$$f\left(k^*\right) = (1+\tilde{n})k^* + \sigma\left(c_h^* + \frac{d_h^*}{1+n}\right) + (1-\sigma)\left(c_l^* + \frac{d_l^*}{1+n}\right) =$$
$$= (1+\tilde{n})k^* + \sigma\left(c_h^{**} + \frac{d_h^{**}}{1+n}\right) + (1-\sigma)\left(c_l^{**} + \frac{d_l^{**}}{1+n}\right).$$

Аналогично, к противоречию приводит предположение, что при введении пенсионной системы благосостояние работников на единицу эффективного труда упадет вместе с благосостоянием капиталистов.

Можно подытожить: при условии, что финансовая система достаточно эффективна, то есть $(1-\Theta)r^* > \tilde{n}$, введение распределительной пенсионной системы приведет в состоянии стационарного равновесия к перераспределению национального продукта между работниками и капиталистами в пользу последних и, следовательно, к росту благосостояния капиталистов и падению благосостояния работников. В случае, когда финансовая система недостаточно эффективна, и $(1-\Theta)r^* < \tilde{n}$, введение распределительной системы пенсионного обеспечения приведет к перераспределению национального богатства между работниками и капиталистами в пользу первых и, следовательно, к росту благосостояния работников и падению благосостояния капиталистов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе введена в рассмотрение двухклассовая (капиталисты и работники) однопродуктовая модель экономического роста перекрывающихся поколений с возможностью наследования. Отличие капиталистов от работников состоит в том, что у первых выше коэффициент дисконтирования и/или доходность их сбережений, причем результаты работы показывают, что в некотором смысле различие в доходностях сбережений играет примерно ту же роль, что и различие в коэффициентах дисконтирования.

Для предложенной модели было введено естественное неоклассическое понятие равновесия сбалансированного роста и показано, что в состоянии равновесия наследство типичного работника обязательно должно быть равно нулю. Доказано существование равновесия и замечено, что равновесие может быть двух типов: с положительным или нулевым наследством типичного капиталиста. В случае, когда в состоянии равновесия наследство типичного капиталиста положительно, равновесные ставка процента, капиталовооруженность и ставка заработной платы однозначно задаются через модифицированное золотое правило коэффициентом дисконтирования капиталистов.

Далее в рамках предложенной модели была описана накопительная и распределительная пенсионные системы. Анализ показал, что введение накопительной пенсионной системы на равновесие не влияет. При условии, что финансовая система эффективна, введение распределительной системы пенсионного обеспечения приведет к перераспределению национального богатства между работниками и капиталистами в пользу последних и, следовательно, к росту благосостояния капиталистов и падению благосостояния работников. В том же случае, когда финансовая система является неэффективной, эффект от введения распределительной пенсионной системы будет прямо противоположным.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Croix D. De la, Michel P. A theory of economic growth: dynamics and policy in overlapping generations. – Cambridge University Press, 2002.
2. Samuelson P.A. An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money // The Journal of Political Economy, 1958, 66(6), pp. 467-482.
3. Diamond P. National debt in a neoclassical growth model // The American Economic Review, 1965, 55(5), pp. 1126-1150.
4. Barro R.J. Are government bonds net wealth? // The Journal of Political Economy, 1974, 82(6), pp. 1095-1117.
5. Борисов К.Ю. Агрегированные модели экономического роста и распределения. – СПб.: СПбЭМИ РАН, 2005.
6. Борисов К.Ю., Сурков А.В. Модель перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. VI. Сборник трудов СПб ЭМИ РАН / Корбут А.А., Печерский С.Л., Руховец Л.А., ред. СПб.: Нестор-История, 2007. С. 45-60.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Борисов Кирилл Юрьевич – доктор экономических наук, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН, декан факультета экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге, профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Сурков Александр Владимирович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН, доцент факультета экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге, доцент кафедры экономической теории экономического факультета Санкт-Петербургского филиала государственного университета – Высшей школы экономики.

Объем 1 п.л. Печать ризографическая. Тираж 100 экз.
Европейский университет в Санкт-Петербурге
191187 Санкт-Петербург, ул. Гагаринская, д. 3.