EUROPEAN UNIVERSITY AT SAINT-PETERSBURG

Кирилл Борисов

Александр Сурков

Двусторонний альтруизм и пенсионная система в моделях перекрывающихся поколений

Препринт Ec-01/08

Факультет экономики

Санкт-Петербург
2008

УДК 330.4
ББК 65В6

Борисов К.Ю., Сурков А.В. **Двусторонний альтруизм и пенсионная система в моделях перекрывающихся поколений:** препринт. – СПб., 2008. - 40 с.

В работе исследованы равновесные траектории в двух моделях перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом. Первая модель позволяет проанализировать случай различной склонности индивида помогать своим детям и родителям («несимметричный» альтруизм). Равновесие в ней представляет собой равновесие по Нэшу. Ситуация, описываемая второй моделью, оказывается эквивалентной случаю, когда два последовательных поколения – не работающие родители и работающие дети, имеют общий бюджет.

Печатается по решению Ученого совета СПб ЭМИ РАН

Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ «Долгосрочные последствия пенсионной реформы: неравенство и экономический рост», проект № 08-02-00411а.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Модель перекрывающихся поколений является удобным инструментов для анализа влияния на поведение экономических агентов государственного долга, пенсионных систем, налогообложения и других аспектов экономической политики. Эта модель была независимо предложена М. Аллэ [1] и П. Самуэльсоном [2] а после введения П. Даймондом в нее производственного сектора [3] стала одной из самых популярных макроэкономических моделей. Более поздние существенные модификации модели связаны с учетом мотива наследования [4], оказывающегося важным при обсуждении рикардианской эквивалентности в задачах о государственном долге, и разработкой моделей перекрывающихся поколений с неоднородными потребителями (см., например, [5]), открывшей принципиально новые возможности по исследованию вопросов неравенства и распределения. В настоящее время модели перекрывающихся поколений посвящена обширная литература (см., например, книгу [6]), оставляющая, впрочем, открытыми некоторые вопросы, важные с точки зрения приложений.

Одним из таких вопросов является описание в рамках модели перекрывающихся поколений так называемого «двустороннего альтруизма»: возможной помощи представителям старшего поколения (родителям) со стороны представителей следующего (младшего) поколения (детей) одновременно с возможностью наследования. Несмотря на то, что был предпринят ряд исследований, посвященных этой проблеме (см., например, [7]), предлагаемые в этой ситуации формулировки модели вызывают определенные сомнения [8]. Между тем, межпоколенческие трансферты такого типа могут оказываться существенными при рассмотрении проблем государственного долга и пенсионных систем.

Относительное невнимание со стороны исследователей к проблеме корректного описания двустороннего альтруизма, возможно, объясняется тем, что в странах Запада межпоколенческий двусторонний альтруизм не распространен (о ситуации в США см. [9,10]). В России – вероятно, чаще, чем в западных странах, встречается расширенная семья, т.е. семья, включающая в себя представителей нескольких поколений. При этом родители и их работающие дети, которые в противном случае образовывали бы отдельные нуклеарные семьи, могут свободно осуществлять двусторонние трансферты. Можно с уверенностью сказать, что помощь родителям со стороны детей является одобряемой в российском обществе, и должна быть включена в модели, описывающие поведение людей в области межпоколенческих отношений. Поэтому учет двустороннего альтруизма кажется особенно актуальным при анализе эффектов распределительной или накопительной пенсионной системы для условий России.

В настоящей работе мы рассматриваем два подхода к описанию двустороннего альтруизма в модели перекрывающихся поколений. В гл. 1 мы обобщаем подход [7], описывающий равновесие в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом как равновесие по Нэшу, на случай неоднородных потребителей. В гл. 2 мы развиваем модель, описывающую ситуацию, когда два последовательных поколения – не работающие родители и работающие дети, имеют общий бюджет, что является типичным для расширенной семьи (в этой части работы мы в основном следуем [11]). Первый подход позволяет проанализировать случай различной склонности индивида помогать своим детям и родителям («несимметричный» альтруизм), в то время как второй подход свободен от, возможно, не слишком реалистичного представления о том, что уровень межпоколенческих трансфертов формируется как равновесие по Нэшу. В рамках обоих подходов мы рассматриваем накопительную и распределительную пенсионные системы.

1. МОДЕЛЬ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ПОКОЛЕНИЙ С «НЕСИММЕТРИЧНЫМ» АЛЬТРУИЗМОМ

1.1. Описание модели

Поведение потребителя

Следуя книге [6] будем описывать жизненный цикл индивида в следующих обозначениях. Индивид, родившийся в момент времени

t, работает в течение периода t, начинающегося в момент t и заканчивающегося в момент времени t+1. В конце этого периода происходят следующие события:

- у индивида появляется (1+n) потомков, которые начинают свой жизненный цикл;
- индивид получает доход, складывающийся из зарплаты w_t и приходящейся на него доли возможного наследства родителей, которые как раз заканчивают свой жизненный цикл – если наследство родителей составляет $x_t \geq 0$, то на данного индивида приходится величина $x_t/(1+n)$;
- этот доход индивид может потратить на потребление $\left(c_t \geq 0\right)$, сбережения (s_t) или помощь родителям $\left(z_t \geq 0\right)$, родившимся в момент $t-1$;

Бюджетное ограничение этого индивида в момент времени t+1 имеет вид

$$c_t + s_t + z_t = w_t + \frac{x_t}{1+n}.$$

В период t+1 индивид не работает. В конце этого периода сбережения индивида составляют $R_{t+1}s_t$, где $R_{t+1}=1+r_{t+1}$, а r_{t+1} – процентная ставка, действовавшая в период t+1. Кроме того, индивид может получить помощь со стороны детей в размере $(1+n)z_{t+1}$. Всю эту сумму (сбережения и помощь детей) индивид делит между текущим потреблением d_{t+1} и наследством x_{t+1}. Его бюджетное ограничение в момент времени t+2 имеет вид

$$d_{t+1} + x_{t+1} = R_{t+1}s_t + \left(1+n\right)z_{t+1}.$$

Предположим, что полезность, которую индивид, родившийся в момент t, извлекает из своего собственного потребления, определяется с помощью функции полезности

$$U\left(c_t, d_{t+1}\right) = u\left(c_t\right) + \beta u\left(d_{t+1}\right),$$

где c_t – это потребление индивида в первый период жизни, d_{t+1} – потребление индивида во второй период жизни, а функция $u\left(\cdot\right)$ – одинакова для всех индивидов во все периоды времени и удовлетворяет естественным условиям – является непрерывной, монотонно возрастающей, строго вогнутой и дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbf{R}_+$, причем $u'(0)=\infty$.

Предположим также, индивид приобретает полезность не только от своего потребления, но и от потребления своих родителей и потомков, т.е. имеет место двусторонний межпоколенческий альтруизм. Полагая, что межпоколенческий альтруизм может быть «несимметричным», будем описывать его двумя параметрами: межпоколенческими коэффициентами дисконтирования потребителя по отношению к своим родителям $\alpha \ge 0$ и потомкам $\gamma \ge 0$. В рамках данных предположений, считая, что вышеупомянутые полезности входят в целевую функцию индивида аддитивно, запишем последнюю в виде

$$V_t = \alpha \frac{u(d_t)}{1+n} + u(c_t) + \beta u(d_{t+1}) + \gamma(1+n)\left[u(c_{t+1}) + \beta u(d_{t+2})\right] + \ldots$$

Параметры α, γ выбраны так, что дисконтирование полезностей родителей и потомков индивида производится с учетом «приходящейся» на индивида доли полезности потребления родителей и числа потомков. Итак, задача, которую решает потребитель, родившийся в момент t, устроена следующим образом:

$$\alpha \frac{u(d_t)}{1+n} + \sum_{\theta=t}^{\infty} \left[\gamma(1+n)\right]^{\theta-t} \left[u(c_\theta) + \beta u(d_{\theta+1})\right] \to \max$$

$$\begin{cases} c_\theta + s_\theta + z_\theta = w_\theta + \dfrac{x_\theta}{1+n}, \\ d_{\theta+1} + x_{\theta+1} = R_{\theta+1} s_\theta + (1+n) z_{\theta+1}, \\ x_\theta, z_\theta \ge 0, \quad \theta = t, t+1, \ldots, \\ x_t \le \overline{x}_t. \end{cases}$$

Наследство $\overline{x}_t$, которое получил индивид, задает в задаче начальное состояние.

Следуя [7], будем считать, что решения о потреблении, сбережениях, помощи родителям и оставляемом наследстве представляют собой равновесие по Нэшу, то есть индивид, принимая свое решение, воспринимает решения членов остальных членов семьи как данность. В частности, определяя помощь родителям z_t, индивид полагает, что его решение способно повлиять на потребление родителей следующим образом

$$d_t = \overline{d}_t + z_t$$

где $\overline{d}_t$ – уровень потребления родителей, определяющийся их собственными решениями и решениями других детей о помощи родителям, которые индивид принимает как данность. Аналогичным образом, решение об оставляемом наследстве x_{t+1} принимается исходя из предположения, что в представлении индивида потребление потомка задается соотношением

$$c_{t+1} = \overline{c}_{t+1} + \frac{x_{t+1}}{1+n}$$

Возможно, описанный механизм принятия решений не вполне соответствует взаимоотношениям между одновременно живущими членами семьи – родителями и детьми. Альтернативная модель развивается в разделе 2.

В рамках сделанных предположений можно заключить, что последовательность $(c_\theta, d_\theta, s_\theta, x_\theta, z_\theta)_{\theta=t,t+1,\ldots}$ является решением задачи потребителя (оптимумом потребителя) только тогда, когда для нее при всех $\theta = t, t+1, \ldots$ выполнены условия

$$u'(c_\theta) = \beta R_{\theta+1} u'(d_{\theta+1}),$$

$$c_\theta + s_\theta + z_\theta = w_\theta + \frac{x_\theta}{1+n},$$

$$d_{\theta+1} + x_{\theta+1} = R_{\theta+1} s_\theta + (1+n) z_{\theta+1},$$

$$\alpha \frac{u'(d_\theta)}{1+n} \le u'(c_\theta),\ z_\theta \ge 0,\ \text{причем}\ \alpha \frac{u(d_\theta)}{1+n} = u'(c_\theta),\ \text{если}\ z_\theta > 0$$

$$\gamma u'(c_{\theta+1}) \le \beta u'(d_{\theta+1}),\ x_{\theta+1} \ge 0,\ \text{причем}\ \gamma u'(c_{\theta+1}) = \beta u'(d_{\theta+1}),\ \text{если}\ x_{\theta+1} > 0$$

$$x_t = \overline{x}_t$$

Указанные необходимые условия становятся достаточными, если их дополнить условием трансверсальности, в данном случае имеющим вид

$$\lim_{t\to+\infty} \left[\gamma(1+n)\right]^t u'(c_t) s_t = 0\ .$$

Подробнее об условиях трансверсальности см. [6].

Из приведенных условий немедленно вытекает, что для существования оптимума потребителя необходимо выполнение следующего соотношения между параметрами

$$\alpha\gamma \le \beta(1+n).$$

Производственный сектор

Будем предполагать, что производственный сектор описывается неоклассической макроэкономической производственной функцией $F(K,L)$, где K – запас основного капитала в экономике, L – численность занятых, а производственный сектор решает задачу о максимизации «экономической» прибыли при заданных ставке процента r и ставке заработной платы w. При условии полного выбытия капитала за рассматриваемый период времени условия равновесия на рынках капитала и труда имеют вид

$$R = 1 + r = F'_K(K,L), \quad w = F'_L(K,L).$$

Введем капиталовооруженность труда $k = K/L$ и производственную функцию в интенсивной форме

$$f(k) = F(k,1) = \frac{1}{L}F(K,L),$$

которую будем считать дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbf{R}_+$, монотонно возрастающей и строго вогнутой, причем $f(0)=0$. Тогда, условия равновесия на рынках труда и капитала можно переписать в виде $R = f'(k), \quad w = f(k) - kf'(k)$.

Равновесие в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом

Единственным источником пополнения основного капитала, предположительно полностью выбывающего за каждый период времени, являются сбережения индивидов

$$K_{t+1} = s_t L_t.$$

Поделив на L_t, это выражение можно переписать следующим образом

$$(1+n)k_{t+1} = s_t.$$

Это уравнение описывает эволюцию капиталовооруженности в зависимости от сбережений s_t.

Сделанные предположения позволяют нам определить равновесие в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом.

Определение 1

Последовательность $\left(k_\theta^*, R_\theta^*, w_\theta^*, c_\theta^*, d_\theta^*, s_\theta^*, x_\theta^*, z_\theta^*\right)_{\theta=t,t+1,\ldots}$, где $k_\theta^* > 0, \theta = t, t+1, \ldots$, называется равновесной траекторией в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом, если выполняются следующие условия:

- $R^* = f'\left(k_\theta^*\right), \quad w^* = f\left(k_\theta^*\right) - k_\theta^* f'\left(k_\theta^*\right), \quad \theta = t, t+1, \ldots;$
- последовательность $\left(c_\theta, d_\theta, s_\theta, x_\theta, z_\theta\right)_{\theta=t,t+1,\ldots}$ является оптимумом потребителя;
- $(1+n)k_{\theta+1}^* = s_\theta^*, \quad \theta = t, t+1, \ldots.$

В дальнейшем мы будем интересоваться стационарными равновесиями в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом.

Определение 2

Стационарными равновесиями в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом называется равновесная траектория $\left(k_\theta^*, R_\theta^*, w_\theta^*, c_\theta^*, d_\theta^*, s_\theta^*, x_\theta^*, z_\theta^*\right)_{\theta=t,t+1,\ldots}$, для которой

$$\left(k_\theta^*, R_\theta^*, w_\theta^*, c_\theta^*, d_\theta^*, s_\theta^*, x_\theta^*, z_\theta^*\right)_{\theta=t,t+1,\ldots} = \left(k^*, R^*, w^*, c^*, d^*, s^*, x^*, z^*\right).$$

Условия, характеризующие стационарные равновесия, имеют вид:

$$R^* = f'\left(k^*\right), \quad w^* = f\left(k^*\right) - k^* f'\left(k^*\right),$$

$$u'\left(c^*\right) = \beta R^* u'\left(d^*\right),$$

$$c^* + s^* + z^* = w^* + \frac{x^*}{1+n},$$

(1) $$d^* + x^* = R^* s^* + (1+n) z^*, \tag{1}$$

$$\alpha \le (1+n)\beta R^*, \ \left[\alpha - (1+n)\beta R^*\right] z^* = 0, \quad z^* \ge 0$$

$$\gamma R^* \le 1, \ \left(\gamma R^* - 1\right) x^* = 0, \quad x^* \ge 0$$

$$(1+n) k^* = s^* > 0.$$

При этом условие трансверсальности выполнено тогда и только тогда, когда $\gamma(1+n)<1$.

Условия (1) позволяют заключить, что ситуация, когда индивид одновременно помогает родителям и оставляет наследство детям, возможна лишь в исключительном случае

$$\frac{\alpha}{\beta(1+n)}=\frac{1}{\gamma}=R^*.$$

В остальных случаях индивид либо оставляет наследство, либо помогает родителям, либо не делает ни того, ни другого. Опишем условия, при которых индивид оставляет наследство или помогает родителям. Определим на множестве положительных чисел функцию $s(k)$, следующим образом

$$s(k)=\arg\max_{s\geq 0}\left\{u\left[w(k)-s\right]+\beta u\left[R(k)s\right]\right\}, \tag{2}$$

где $R(k)=f'(k),\quad w(k)=f(k)-kf'(k)$.

Пусть k_1, k_2 – решения уравнений

$$f'(k_1)=\frac{1}{\gamma},\quad f'(k_2)=\frac{\alpha}{\beta(1+n)},\quad k_1\leq k_2.$$

Рассматривая устойчивые равновесия, для которых

$$s'(k^*)<1+n$$

мы можем сформулировать следующее предложение (в других обозначениях данные утверждения приведены в [7]).

Предложение 1

1. Для любого стационарного равновесия $(k^*,R^*,w^*,c^*,d^*,s^*,x^*,z^*)$ в данной модели выполняются неравенства $k_1\leq k^*\leq k_2$.
2. При этом, чистые трансферты от родителей к детям $\xi^*=x^*/(1+n)-z^*$ могут быть положительными лишь в случае, когда $k^*=k_1$, а отрицательными – когда $k^*=k_2$.
3. Кроме того, если $s(k_1)<(1+n)k_1$, то существует такое стационарное равновесие, для которого $k^*=k_1$ и $x^*>0$.

4. Если $s(k_2) > (1+n)k_2$, то существует такое стационарное равновесие, для которого $k^* = k_2$ и $z^* > 0$.
5. Если $s(k_1) \geq (1+n)k_1$, $s(k_2) \leq (1+n)k_2$ и $k_1 < k_2$, то найдется стационарное равновесие, в котором $k_1 \leq k^* \leq k_2$, и $x^* = z^* = 0$.
6. Если $k_1 = k_2$, то в стационарном равновесии, в котором $k^* = k_1 = k_2$, а чистые межпоколенческие трансферты $\xi^* > \{=,<\} 0$ если $s(k_1) = s(k_2) < \{=,>\} (1+n)k_1 = (1+n)k_2$.

Действительно, если $s(k_1) < (1+n)k_1$, то даже при $k = k_1$, когда достигается максимум функции $s(k) - (1+n)k$, мотив жизненного цикла не обеспечивает сбережений достаточных для поддержания равновесной капиталовооруженности. При этом необходимо, чтобы чистые межпоколенческие трансферты ξ^* были положительны, что возможно только лишь когда задействован мотив наследования. Аналогично, при $s(k_2) > (1+n)k_2$ в стационарном равновесии должен быть задействован мотив помощи родителям. Если же $s(k_1) \geq (1+n)k_1$, $s(k_2) \leq (1+n)k_2$ и $k_1 < k_2$, то на отрезке $[k_1, k_2]$ обязательно найдется точка $k^* \in [k_1, k_2]$, для которой $s(k^*) = (1+n)k^*$, и которая описывает равновесие как в модели перекрывающихся поколений без межпоколенческого альтруизма и возможности осуществлять межпоколенческие трансферты, так и в рассматриваемой модели.

В заключение заметим, что в случае, когда репрезентативный индивид оставляет наследство, равновесная капиталовооруженность в данной модели определяется, как и в модели Рамсея, модифицированным «золотым» правилом, т.е. имеет место недонакопление $(R^* > 1+n)$. Abel [7] отмечает, что если индивид наследства не оставляет, а, напротив, помогает родителям, то может иметь место любое соотношение между равновесной капиталовооруженностью и «золотой».

1.2. Пенсионная система в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом

В данном разделе в рамках модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом мы рассмотрим обязательную накопительную и распределительную пенсионные системы. Анализ последствий введения той или иной пенсионной системы мы будем изучать в рамках исследования сравнительной статики. При этом для простоты будем предполагать, что как в «старом» состоянии равновесия (без пенсионной системы), так и в «новом» (с пенсионной системой) наблюдается недонакопление, т.е. $\left(R^{*} > 1+n\right)$.

Накопительная пенсионная система в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом в случае совершенного рынка капитала

Введем в рассматриваемую модель обязательную накопительную пенсионную схему, устроенную следующим образом: в первый период своей жизни индивид, родившийся в момент времени t, обязан внести вклад в пенсионный фонд в размере $a_t \geq 0$, а во второй период он получает пенсию в размере $R_{t+1}a_t$.

При изучении последствий введения накопительной пенсионной системы важным фактором является степень совершенства рынка капитала, под которым здесь мы будем понимать возможность для индивида занимать. Если рынок капитала совершенен, и индивид не ограничен в кредите, то задача индивида при наличии накопительной пенсионной системы оказывается полностью эквивалентной такой же задаче в случае без пенсионной системы

$$\alpha \frac{u\left(d_t\right)}{1+n} + \sum_{\theta=t}^{\infty}\left[\gamma\left(1+n\right)\right]^{\theta-t}\left[u\left(c_\theta\right)+\beta u\left(d_{\theta+1}\right)\right] \to \max$$

$$\begin{cases} c_\theta + \left(s_\theta + a_\theta\right) + z_\theta = w_\theta + \dfrac{x_\theta}{1+n}, \\ d_{\theta+1} + x_{\theta+1} = R_{\theta+1}\left(s_\theta + a_\theta\right) + \left(1+n\right) z_{\theta+1}, \\ x_\theta, z_\theta \geq 0, \quad \theta = t, t+1, \ldots, \\ x_t \leq \overline{x}_t. \end{cases}$$

В этой ситуации введение накопительной пенсионной системы лишь уменьшает добровольные сбережения s_θ^* на a_θ, и иного влияния на состояние равновесия в данной модели не оказывает. Сформулированные выше условия равновесия в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом требовали положительности сбережений. При введении пенсионной системы это требование модифицируется, превращаясь в необходимость положительности суммарных сбережений индивида, включающих его накопления в пенсионном фонде

$$(1+n)k_{\theta+1}^* = s_\theta^* + a_\theta > 0, \quad \theta = t, t+1, \ldots$$

Это значит, что в равновесии в модели перекрывающихся поколений с накопительной пенсионной системой добровольные сбережения индивида могут быть отрицательными, т.е. он может занимать. При этом объем заимствования не может превосходить пенсионных накоплений индивида, которые в данном случае можно трактовать как обеспечение займа [6].

Накопительная пенсионная система в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом в случае несовершенного рынка капитала

Если индивид ограничен в кредите – например, его добровольные сбережения не могут быть меньше $\underline{s} \le 0$, то задача потребителя с учетом накопительной пенсионной системы имеет вид

$$\alpha \frac{u(d_t)}{1+n} + \sum_{\theta=t}^{\infty} \left[\gamma(1+n)\right]^{\theta-t} \left[u(c_\theta) + \beta u(d_{\theta+1})\right] \to \max$$

$$\begin{cases} c_\theta + (s_\theta + a_\theta) + z_\theta = w_\theta + \dfrac{x_\theta}{1+n}, \\ d_{\theta+1} + x_{\theta+1} = R_{\theta+1}(s_\theta + a_\theta) + (1+n) z_{\theta+1}, \\ s_\theta \ge \underline{s}, \quad x_\theta, z_\theta \ge 0, \quad \theta = t, t+1, \ldots, \\ x_t \le \overline{x}_t. \end{cases}$$

При этом последовательность $(c_\theta, d_\theta, s_\theta, x_\theta, z_\theta)_{\theta=t,t+1,\ldots}$ является решением задачи потребителя (оптимумом потребителя) только тогда, когда для нее при всех $\theta = t, t+1, \ldots$ выполнены условия

$$c_\theta + (s_\theta + a_\theta) + z_\theta = w_\theta + \frac{x_\theta}{1+n},$$
$$d_{\theta+1} + x_{\theta+1} = R_{\theta+1}(s_\theta + a_\theta) + (1+n) z_{\theta+1},$$
$$u'(c_\theta) \ge \beta R_{\theta+1} u'(d_{\theta+1}),\ \text{причем}\ u'(c_\theta) = \beta R_{\theta+1} u'(d_{\theta+1}),\ \text{если}\ s_\theta > \underline{s}$$
$$\alpha \frac{u'(d_\theta)}{1+n} \le u'(c_\theta),\ \text{причем}\ \alpha \frac{u(d_\theta)}{1+n} = u'(c_\theta),\ \text{если}\ z_\theta > 0$$
$$\gamma u'(c_{\theta+1}) \le \beta u'(d_{\theta+1}),\ \text{причем}\ \gamma u'(c_{\theta+1}) = \beta u'(d_{\theta+1}),\ \text{если}\ x_{\theta+1} > 0$$
$$x_{\theta+1} \ge 0, \quad z_\theta \ge 0, \quad x_t = \overline{x}_t$$

Условия стационарного равновесия в случае, когда индивид ограничен в кредите $s \ge \underline{s}$, будут иметь несколько иной вид, чем (1):

$$R^* = f'(k^*), \quad w^* = f(k^*) - k^* f'(k^*),$$
$$c^* + (s^* + a) + z^* = w^* + \frac{x^*}{1+n},$$
$$d^* + x^* = R^*(s^* + a) + (1+n) z^*,$$
$$u'(c^*) \ge \beta R^* u'(d^*),\ \left[u'(c^*) - \beta R^* u'(d^*)\right](s - \underline{s}) = 0, \quad s^* \ge \underline{s}$$
$$\frac{\alpha}{1+n} u'(d^*) \le u'(c^*),\ \left[\frac{\alpha}{1+n} u'(d^*) - u'(c^*)\right] z^* = 0, \quad z^* \ge 0$$
$$\gamma u'(c^*) \le \beta u'(d^*),\ \left[\gamma u'(c^*) - \beta u'(d^*)\right] x^* = 0, \quad x^* \ge 0$$
$$(1+n) k^* = s^* + a > 0.$$

Воспользовавшись обозначениями предыдущего раздела, в рамках исследования сравнительной статики, проанализируем, как будет меняться состояние равновесия при увеличении размера обязательного взноса в пенсионный фонд a.

1. Если $s(k_1) < (1+n) k_1$, то исходное равновесие характеризуется тем, что в нем $k^*\big|_{a=0} = k_1$ и $x^*\big|_{a=0} > 0$.
   - При росте обязательного взноса в пенсионную систему равновесные сбережения будут уменьшаться, так как в равновесии данного типа $(1+n)k^* = (1+n)k_1 = s^* + a$.
   - Пока $a \le (1+n)k_1 - \underline{s}$ равновесие характеризуется неизменным потреблением и оставляемым наследством: происходит лишь

перераспределение добровольных сбережений в пользу обязательных.

- При $a > (1+n)k_1 - \underline{s}$ равновесная капиталовооруженность $k^* = (\underline{s} + a)/(1+n)$ оказывается больше k_1. При этом $s^* = \underline{s}$ и положительное наследство возможно при $k^* \ge k_1$. С ростом a равновесное потребление и в первый и во второй период жизни индивида будет расти.
- Положительная помощь родителям становится возможной при $k^* \ge k_2$, однако одновременно с положительным наследством она допускается лишь в исключительном случае $k_1 = k_2$.

2. Если $s(k_1) \ge (1+n)k_1$, $s(k_2) \le (1+n)k_2$ и $k_1 < k_2$, то в исходном равновесии $k_1 \le k^*\big|_{a=0} \le k_2$ и $x^*\big|_{a=0} = z^*\big|_{a=0} = 0$.

- При росте обязательного взноса в пенсионную систему равновесные сбережения будут уменьшаться, сохраняя $(1+n)k^* = s^* + a$, пока $a \le (1+n)k^* - \underline{s}$. Так как величина $s^* + a$ остается постоянной, то потребление и межпоколенческие трансферты индивидов не изменятся.
- При $a > (1+n)k^* - \underline{s}$ равновесная капиталовооруженность начнет расти $(1+n)k^* = a + \underline{s}$. Так как добровольные сбережения достигнут минимума $s^* = \underline{s}$, то становится возможным положительное наследство $\left(k^* \ge k_1\right)$. Рост a приведет к росту равновесного потребления и в первый и во второй период жизни.
- Положительная помощь родителям становится возможной при $k^* \ge k_2$, однако одновременно с положительным наследством она допускается лишь в исключительном случае $k_1 = k_2$.

3. Если в исходном равновесии $s(k_2) > (1+n)k_2$, это равновесие характеризуется тем, что в нем $k^*\big|_{a=0} = k_2$ и $z^*\big|_{a=0} > 0$.

- При росте обязательного взноса в пенсионную систему добровольные сбережения будут уменьшаться, так как в равновесии данного типа $(1+n)k^* = (1+n)k_2 = s^* + a$.

- Пока $a \le (1+n)k_2 - \underline{s}$ равновесие характеризуется неизменным потреблением и оставляемым наследством: происходит лишь перераспределение добровольных сбережений в пользу обязательных.
- При $a > (1+n)k_2 - \underline{s}$ $s^* = \underline{s}$ и помощь родителям может быть положительной при $k^* \ge k_2$. Равновесная капиталовооруженность равна $(1+n)k^* = \underline{s} + a > (1+n)k_2$. С ростом *a* равновесное потребление и в первый и во второй период жизни индивида будет расти.

Распределительная пенсионная система в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом

Введение распределительной пенсионной системы означает, что бюджетные ограничения индивида, родившегося в момент времени *t*, имеют вид

$$\begin{cases} c_t + s_t = w_t + \dfrac{x_t}{1+n} - (z_t + a_t), \\ d_{t+1} + x_{t+1} = R_{t+1}s_t + (1+n)(z_{t+1} + a_{t+1}). \end{cases}, \qquad (3)$$

т.е. распределительная схема описывается принудительным межпоколенческим трансфертом от детей к родителям.

Попытаемся установить, как изменится состояние стационарного равновесия (возможного, естественно, лишь при $a_\theta = a, \quad \theta = t, t+1, \dots$) при введении распределительной пенсионной системы. Переопределим функцию (2) следующим образом

$$s(k,a) = \arg\max_{s\ge 0}\left\{u\left[w(k) - s - a\right] + \beta u\left[R(k)s + (1+n)a\right]\right\},$$

где $R(k) = f'(k), \quad w(k) = f(k) - kf'(k)$. Вид функции $s(k,a)$, позволяют заключить, что $s'_a < 0$.

Теперь мы можем изучить влияние введения распределительной пенсионной системы в рамках исследования сравнительной статики.

1. Если $s(k_1, 0) < (1+n)k_1$, то в исходном равновесии $k^*\big|_{a=0} = k_1$ и $x^*\big|_{a=0} > 0$. Введение распределительной пенсионной системы тип

равновесия не меняет: $s(k_1,a)\big|_{a>0} < s(k_1,0) < (1+n)k_1$, $k^*\big|_{a>0} = k_1$, $x^*\big|_{a>0} > 0$. Так как равновесная капиталовооруженность осталась прежней, то потребление, сбережения и суммарные межпоколенческие трансферты индивидов не изменятся. То есть, можно заключить, что оставляемое наследство увеличится так, чтобы скомпенсировать обязательный трансферт от детей к родителям, предусматриваемый пенсионной системой $x^*\big|_{a>0} = x^*\big|_{a=0} + a$

2. Если $s(k_2,0) > (1+n)k_2$, то исходное равновесие характеризуется тем, что в нем $k^*\big|_{a=0} = k_2$ и $z^*\big|_{a=0} > 0$.
   - Введение распределительной пенсионной системы тип равновесия не меняет, если $(1+n)k_2 < s(k_2,a)\big|_{a>0} < s(k_2,0)$, и тогда $k^*\big|_{a>0} = k_2$ и $z^*\big|_{a>0} = z^*\big|_{a=0} - a > 0$ – помощь родителям со стороны детей уменьшится так, чтобы скомпенсировать обязательный трансферт от детей к родителям, предусматриваемый пенсионной системой.
   - Если же введение распределительной пенсионной системы изменит тип равновесия, т.е. $s(k_2,a)\big|_{a>0} \le (1+n)k_2 < s(k_2,0)$, то индивид перестанет добровольно помогать родителям. При этом, если $s(k_1,a) \ge (1+n)k_1$, то найдется равновесие, в котором $k_1 \le k^*\big|_{a>0} \le k_2 = k^*\big|_{a=0}$ и $x^*\big|_{a>0} = z^*\big|_{a>0} = 0$. В этой ситуации, даже прекратив помогать родителям индивид не способен скомпенсировать обязательный межпоколенческий трансферт. Так как равновесная капиталовооруженность установится на более низком уровне, чем в случае без пенсионной системы, то потребление индивида уменьшится вместе с суммарными чистыми трансфертами от родителей к детям.
   - При более высоком уровне обязательных межпоколенческих трансфертов, когда $s(k_1,a) < (1+n)k_1$, новое состояние равновесия может предусматривать оставление наследства. Однако, равновесная капиталовооруженность при этом установится на

уровне $k^*\big|_{a>0} = k_1 < k_2 = k^*\big|_{a=0}$ и потребление индивида уменьшится вместе с суммарными чистыми трансфертами от родителей к детям.

3. Если $s(k_1,0) \geq (1+n)k_1$, $s(k_2,0) \leq (1+n)k_2$ и $k_1 < k_2$, то в исходном равновесии $k_1 \leq k^*\big|_{a=0} \leq k_2$ и $x^*\big|_{a=0} = z^*\big|_{a=0} = 0$.
   - Введение распределительной пенсионной системы тип равновесия не меняет, если $(1+n)k_1 \leq s(k_1,a)\big|_{a>0} < s(k_1,0)$, и тогда в новом равновесии $x^*\big|_{a>0} = z^*\big|_{a>0} = 0$. Однако суммарные чистые трансферты от родителей к детям уменьшатся, что приведет к уменьшению потребление индивида.
   - Введение распределительной пенсионной системы может поменять тип равновесия. Если $s(k_1,a)\big|_{a>0} < (1+n)k_1$, то индивид начинает оставлять наследство. При этом в новом равновесии, равновесная капиталовооруженность установится на уровне $k^*\big|_{a>0} = k_1 < k^*\big|_{a=0}$ и потребление индивида уменьшится.
4. В исключительном случае $\alpha\gamma = \beta(1+n)$, когда индивид может одновременно помогать родителям и оставлять наследство, в исходном равновесии $k^*\big|_{a=0} = k_1 = k_2$, а чистые межпоколенческие трансферты $\xi^*\big|_{a=0} > \{=,<\} 0$ если $s(k_1,0) = s(k_2,0) < \{=,>\} (1+n)k_1 = (1+n)k_2$. В равновесии с распределительной пенсионной системой $k^*\big|_{a>0} = k_1 = k_2$, а чистые трансферты от родителей к детям $\xi^*\big|_{a>0} > \{=,<\} 0$ если $s(k_1,a) = s(k_2,a) < \{=,>\} (1+n)k_1 = (1+n)k_2$ – они увеличатся так, чтобы скомпенсировать обязательный трансферт от детей к родителям, предусматриваемый пенсионной системой. Благосостояние индивида не изменится.

1.3. Модель перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом и неоднородными потребителями

В данном разделе мы будем считать, что в общество состоит из индивидов, межпоколенческие коэффициенты дисконтирования $(\alpha/\beta,\gamma)$ которых принадлежат набору

$$\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta},\gamma\right):\frac{\alpha}{\beta}\in\left\{\frac{\alpha_h}{\beta_h},\frac{\alpha_l}{\beta_l}\right\},\gamma\in\{\gamma_h,\gamma_l\}\right\}$$

причем $\alpha_h/\beta_h>\alpha_l/\beta_l$, $\gamma_h>\gamma_l$. То есть, все общество разбивается на четыре непересекающиеся группы *A*, *B*, *C* и *D*, такие, что

$$\frac{\alpha_A}{\beta_A}=\frac{\alpha_B}{\beta_B}=\frac{\alpha_h}{\beta_h},\quad \frac{\alpha_C}{\beta_C}=\frac{\alpha_D}{\beta_D}=\frac{\alpha_l}{\beta_l},\quad \gamma_A=\gamma_C=\gamma_h,\quad \gamma_B=\gamma_D=\gamma_l.$$

Пусть $\sigma_i,\ i=A,B,C,D$ доля индивидов, принадлежащих к соответствующей группе, в общей численности населения

$$0<\sigma_i\le 1,\ i=A,B,C,D,\qquad \sum_{i=A,B,C,D}\sigma_i=1.$$

Стационарное равновесие в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом и неоднородными потребителями

Определим стационарное равновесие в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом и неоднородными потребителями как набор $\left\{k^*,R^*,w^*,\left\{c_i^*,d_i^*,s_i^*,x_i^*,z_i^*,i=A,B,C,D\right\}\right\}$, для которого $k^*>0$, а также выполняются следующие условия:

- $R^*=f'(k^*),\quad w^*=f(k^*)-k^*f'(k^*)$;
- последовательность

  $$(c_\theta,d_\theta,s_\theta,x_\theta,z_\theta)_{\theta=t,t+1,\ldots}=\left(c_i^*,d_i^*,s_i^*,x_i^*,z_i^*\right),\quad i=A,B,C,D$$

  является оптимумом потребителя с межвременным коэффициентом дисконтирования β_i, $i=A,B,C,D$ и межпоколенческими коэффициентами дисконтирования $\alpha_i,\gamma_i,\quad i=A,B,C,D$, т.е. решением задачи

$$\alpha_i \frac{u(d_t)}{1+n} + \sum_{\theta=t}^{\infty} \left[\gamma_i (1+n)\right]^{\theta-t} \left[u(c_\theta) + \beta_i u(d_{\theta+1})\right] \to \max$$

$$\begin{cases} c_\theta + s_\theta + z_\theta = w_\theta + \dfrac{x_\theta}{1+n}, \\ d_{\theta+1} + x_{\theta+1} = R_{\theta+1} s_\theta + (1+n) z_{\theta+1}, \\ x_\theta, z_\theta \geq 0, \quad \theta = t, t+1, \ldots, \\ x_t \leq \bar{x}_t. \end{cases}$$

- $(1+n)k^* = \sum\limits_{i=A,B,C,D} \sigma_i s_i^*$.

Выпишем условия стационарного равновесия в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом и неоднородными потребителями:

1. Условия стационарного оптимума потребителя индивида, принадлежащего к группе $i = A, B, C, D$, имеют вид
$$u'(c_i^*) = \beta_i R^* u'(d_i^*),$$
$$c_i^* + s_i^* + z_i^* = w^* + \frac{x_i^*}{1+n},$$
$$d_i^* + x_i^* = R^* s_i^* + (1+n) z_i^*,$$
$$\alpha_i \leq (1+n)\beta_i R^*, \ \left[\alpha_i - (1+n)\beta_i R^*\right] z_i^* = 0,$$
$$\gamma_i R^* \leq 1, \ (\gamma_i R^* - 1) x_i^* = 0;$$
2. Эволюция капиталовооруженности описывается выражением
$$(1+n)k^* = \sum_{i=A,B,C,D} \sigma_i s_i^* > 0 .$$

Из условий 1–2, которые в равновесии должны выполняться совместно, можно заключить, что в стационарном равновесии

- $R^* \leq 1/\gamma_h < 1/\gamma_l$, т.е. индивиды из групп *B*, *D* наследства не оставляют;
- $R^* \geq \dfrac{\alpha_h}{\beta_h (1+n)} > \dfrac{\alpha_l}{\beta_l (1+n)}$, т.е. индивиды из групп *C*, *D* родителям не помогают;

- индивиды из группы *A* могут как оставлять наследство, так и помогать родителям, индивиды из группы *B* могут помогать родителям, а индивиды из группы *C* могут оставлять наследство.

Определим на множестве положительных чисел функцию

$$S(k) = \sum_{i=A,B,C,D} \sigma_i s_i(k) \tag{4}$$

где $s_i(k) = \arg\max_{s\geq 0}\left\{u\left[w(k)-s\right]+\beta_i u\left[R(k)s\right]\right\}$, $i = A,B,C,D$, а $R(k) = f'(k)$, $w(k) = f(k) - kf'(k)$.

Пусть $k_1^i, k_2^i, i = h,l$ – решения уравнений

$$f'\left(k_1^i\right) = \frac{1}{\gamma_i}, \quad f'\left(k_2^i\right) = \frac{\alpha_i}{\beta_i(1+n)}, \quad k_1^i \leq k_2^i, \quad i = A,B,C,D, \quad .$$

$$k_1^A = k_1^C > k_1^B = k_1^D, \quad k_2^A = k_2^B < k_2^C = k_2^D.$$

Возможен единственный вариант взаимного расположения чисел k_1^i, k_2^i, $i = A,B,C,D,$: $k_1^B = k_1^D < k_1^A = k_1^C \leq k_2^A = k_2^B < k_2^C = k_2^D$.

Переформулируем Предложение 1 для случая неоднородных потребителей.

Предложение 2

1. *Для любого стационарного равновесия* $\left\{k^*, R^*, w^*, \left\{c_i^*, d_i^*, s_i^*, x_i^*, z_i^*, i = A,B,C,D\right\}\right\}$ в данной модели выполняются неравенства $k_1^A = k_1^C \leq k^* \leq k_2^A = k_2^B$. Далее, по аналогии с Предложением 1 обозначим $k_1 \equiv k_1^A = k_1^C$, $k_2 \equiv k_2^A = k_2^B$
2. Чистые трансферты от родителей к детям могут быть положительными лишь в группах *A* и *C*, когда $k^* = k_1$, а отрицательными – лишь в группах *A* и *B*, когда $k^* = k_2$. То есть, всегда $x_B^* = z_C^* = x_D^* = z_D^* = 0$.
3. Кроме того, если $S(k_1) < (1+n)k_1$, то существует такое стационарное равновесие, для которого $k^* = k_1$ и $\max\left\{x_A^*, x_C^*\right\} > 0$.
4. Если $S(k_2) > (1+n)k_2$, то существует такое стационарное равновесие, для которого $k^* = k_2^A = k_2^B$ и $\max\left\{z_A^*, z_B^*\right\} > 0$.

5. Если $S(k_1) \ge (1+n)k_1$, $S(k_2) \le (1+n)k_2$ $k_1 < k_2$, то найдется стационарное равновесие, в котором $k_1 \le k^* \le k_2$ и $x_A^* = z_A^* = x_C^* = z_B^* = 0$.
6. Если $\tilde{k} \equiv k_1 = k_2$, $\tilde{s} \equiv S(k_1) = S(k_2)$, и
   - $\tilde{s} < (1+n)\tilde{k}$, то найдется стационарное равновесие, в котором $k^* = \tilde{k}$ и $\max\{\xi_A^*, x_C^*\} > 0$;
   - $\tilde{s} > (1+n)\tilde{k}$, то найдется стационарное равновесие, в котором $k^* = \tilde{k}$ и $\max\{\xi_A^*, z_B^*\} > 0$;
   - $\tilde{s} = (1+n)\tilde{k}$, то найдется стационарное равновесие, в котором $k^* = \tilde{k}$ и $\xi_A^* = x_C^* = z_B^* = 0$.

Предложение 2 поясняется аналогично Предложению 1.

Если индивиды из групп *A* или *C* оставляют наследство, то они оказываются богаче, чем индивиды из групп *B* и *D*, которые наследства не оставляют, в том смысле, что для первых величина

$$c_i^* + \frac{d_i^*}{R^*} = w^* + \left(1 - \frac{1+n}{R^*}\right)\xi_i^*$$

больше (здесь и далее мы полагаем, что $R^* > 1+n$). Аналогичным образом, если индивиды из групп *A* или *B* помогают родителям, то они оказываются беднее, чем индивиды из групп *C* и *D*, которые родителям не помогают.

Пенсионная система в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом и неоднородными потребителями

В случае неоднородных потребителей последствия введения накопительной или распределительной пенсионных систем можно проанализировать аналогично случаю однородных агентов. Интерес представляют перераспределительные эффекты, которые модель с однородными потребителями описать не может. Введение накопительной пенсионной системы в случае совершенного рынка капитала, как и ранее, на состояние равновесия не влияет. В случае несовершенного рынка капитала накопительная пенсионная система может увеличить благосостояние индивидов за счет принуждения их к сбережениям. Этот эффект связан с ростом личных сбережения потребителей и не имеет перераспределительного характера. Иная ситуация возникает при введении распределительной пенсионной системы.

Распределительная пенсионная система в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом и неоднородными потребителями

Переопределим функцию (4) следующим образом: $S(k,a) = \sum_{i=A,B,C,D} \sigma_i s_i\ (k,a)$, где

$$s_i(k,a) = \arg\max_{s\geq 0}\left\{u\left[w(k)-s-a\right]+\beta_i u\left[R(k)s+(1+n)a\right]\right\}.$$

Как и ранее, можно заключить, что $S'_a < 0$.

В рамках исследования сравнительной статики опишем эффекты введения распределительной пенсионной системы в модели перекрывающихся поколений с «несимметричным» альтруизмом и неоднородными потребителями.

1. Если $S(k_1,0)<(1+n)k_1$, то в исходном равновесии $k^*\big|_{a=0}=k_1$ и $\max\left\{x_A^*\big|_{a=0}, x_C^*\big|_{a=0}\right\}>0$. Введение распределительной пенсионной системы тип равновесия не меняет: $S(k_1,a)\big|_{a>0}<S(k_1,0)<(1+n)k_1$, $k^*\big|_{a>0}=k_1$, $\max\left\{x_A^*\big|_{a>0}, x_C^*\big|_{a>0}\right\}>0$. При этом индивиды из групп *B* и *D* не оставляют наследства, не помогают родителям, и вынуждены осуществлять обязательный трансферт от детей к родителям, предусматриваемый пенсионной системой. Это приводит к уменьшению их потребления и сбережений. Так как равновесная капиталовооруженность в равновесии данного типа не изменилась, то можно заключить, что сбережения (а значит и потребление, и суммарные чистые трансферты от родителей к детям) индивидов, которые могут оставлять наследство, вырастут.

   Таким образом, введение распределительной пенсионной системы приведет в данном случае к перераспределению богатства от потребителей, не оставляющих наследство («бедных»), к потребителям, оставляющим наследство («богатым»). Это связано с тем, что «богатые» могут, хотя бы отчасти, скомпенсировать обязательный трансферт от детей к родителям за счет увеличения наследства, в то время как «бедные» наследства не оставляют и этого сделать не могут.

2. Если $S(k_2,0)>(1+n)k_2$, то исходное равновесие характеризуется тем, что в нем $k^*\big|_{a=0}=k_2$ и $\max\left\{z_A^*\big|_{a=0}, z_B^*\big|_{a=0}\right\}>0$.

- Введение распределительной пенсионной системы тип равновесия не меняет, если $(1+n)k_2<S(k_2,a)\big|_{a>0}<S(k_2,0)$, и тогда $k^*\big|_{a>0}=k_2$ и $\max\left\{z_A^*\big|_{a>0}, z_B^*\big|_{a>0}\right\}>0$. При этом, индивиды из групп C и D не помогают родителям, не оставляют наследства, и вынуждены осуществлять обязательный трансферт от детей к родителям, предусматриваемый пенсионной системой. Это приводит к уменьшению их потребления и сбережений. Так как равновесная капиталовооруженность в равновесии данного типа не изменилась, то можно заключить, что сбережения (а значит и потребление, и суммарные чистые трансферты от родителей к детям) индивидов, которые могут помогать родителям, вырастут.

  Таким образом, введение распределительной пенсионной системы приведет в данном случае к перераспределению богатства от потребителей, не помогающих родителям, к потребителям, помогающим родителям. Это связано с тем, что первые могут, хотя бы отчасти, скомпенсировать обязательный трансферт от детей к родителям за счет уменьшения помощи родителям, в то время как вторые родителям не помогают и этого сделать не могут.
- Если же введение распределительной пенсионной системы изменит тип равновесия, т.е. $S(k_2,a)\big|_{a>0}\le(1+n)k_2<S(k_2,0)$, то индивид перестанет добровольно помогать родителям. При этом, если $S(k_1,a)\ge(1+n)k_1$, то найдется равновесие, в котором $k_1\le k^*\big|_{a>0}\le k_2=k^*\big|_{a=0}$ и $x_A^*\big|_{a>0}=z_A^*\big|_{a>0}=x_C^*\big|_{a>0}=z_B^*\big|_{a>0}=0$. В этой ситуации, даже прекратив помогать родителям индивид не способен скомпенсировать обязательный межпоколенческий трансферт. Так как равновесная капиталовооруженность уста-

новится на более низком уровне, чем в случае без пенсионной системы, то потребление всех индивидов уменьшится вместе с суммарными чистыми трансфертами от родителей к детям.

- При более высоком уровне обязательных межпоколенческих трансфертов, когда $S(k_1, a) < (1+n)k_1$, новое состояние равновесия может предусматривать оставление наследства. Однако, равновесная капиталовооруженность при этом установится на уровне $k^*\big|_{a>0} = k_1 < k_2 = k^*\big|_{a=0}$ и потребление всех индивидов уменьшится вместе с суммарными чистыми трансфертами от родителей к детям.

3. Если $S(k_1, 0) \geq (1+n)k_1$, $S(k_2, 0) \leq (1+n)k_2$ и $k_1 < k_2$, то в исходном равновесии $k_1 \leq k^*\big|_{a=0} \leq k_2$ и $x_A^*\big|_{a=0} = z_A^*\big|_{a=0} = x_C^*\big|_{a=0} = z_B^*\big|_{a=0} = 0$.

- Введение распределительной пенсионной системы тип равновесия не меняет, если $(1+n)k_1 \leq S(k_1, a)\big|_{a>0} < S(k_1, 0)$, и тогда в новом равновесии $x_A^*\big|_{a>0} = z_A^*\big|_{a>0} = x_C^*\big|_{a>0} = z_B^*\big|_{a>0} = 0$. Однако суммарные чистые трансферты от родителей к детям уменьшатся, что приведет к уменьшению потребления всех индивидов.
- Введение распределительной пенсионной системы может поменять тип равновесия. Если $S(k_1, a)\big|_{a>0} < (1+n)k_1$, то индивиды из групп A и C в новом равновесии могут оставлять наследство. При этом равновесная капиталовооруженность установится на уровне $k^*\big|_{a>0} = k_1 < k^*\big|_{a=0}$ и потребление всех индивидов уменьшится.

2. МОДЕЛЬ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ПОКОЛЕНИЙ ДЛЯ РАСШИРЕННОЙ СЕМЬИ

2.1. Описание модели

Поведение потребителя

Как и в предыдущей главе, следуя книге [6], мы будем описывать жизненный цикл индивида в следующих обозначениях. Индивид, родившийся в момент времени t, работает в течение периода t, начинающегося в момент t и заканчивающегося в момент времени $t+1$. В конце этого периода происходят следующие события:

- у индивида появляется $(1+n)$ потомков, которые начинают свой жизненный цикл;
- индивид получает доход, складывающийся из зарплаты w_t и приходящейся на него доли возможного наследства родителей, которые как раз заканчивают свой жизненный цикл – если наследство родителей составляет $x_t \geq 0$, то на данного индивида приходится величина $x_t/(1+n)$;
- этот доход индивид может потратить на потребление $(c_t \geq 0)$, сбережения (s_t) или помощь родителям $(z_t \geq 0)$, родившимся в момент $t-1$;

Бюджетное ограничение этого индивида в момент времени t+1 имеет вид

$$c_t + s_t + z_t = w_t + \frac{x_t}{1+n}.$$

В период $t+1$ индивид не работает. В конце этого периода сбережения индивида составляют $R_{t+1}s_t$, где $R_{t+1}=1+r_{t+1}$, а r_{t+1} – процентная ставка, действовавшая в период $t+1$. Кроме того, индивид может получить помощь со стороны детей в размере $(1+n)z_{t+1}$. Всю эту сумму (сбережения и помощь детей) индивид делит между текущим потреблением d_{t+1} и наследством x_{t+1}. Его бюджетное ограничение в момент времени $t+2$ имеет вид

$$d_{t+1} + x_{t+1} = R_{t+1}s_t + (1+n)\,z_{t+1}.$$

Складывая бюджетные ограничения индивидов, живущих одновременно в период t, но принадлежащих к разным поколениям

$$\begin{cases} (1+n)(c_t + s_t + z_t) = (1+n)\,w_t + x_t, \\ d_t + x_t = R_t s_{t-1} + (1+n)\,z_t, \end{cases}$$

получаем бюджетное ограничение расширенной семьи

$$d_t + (1+n)(c_t + s_t) = (1+n)\,w_t + R_t s_{t-1}.$$

Иными словами, наличие межпоколенческих трансфертов (x_t и z_t) дает возможность расширенной семье распределять совокупный доход семьи, стоящий в правой части этого выражения, между потреблением всех живущих одновременно членов семьи и сбережениями.

Предположим, что индивиды получают одинаковую полезность $u(\cdot)$ от потребления, которая не меняется в течение их жизненного цикла. Допустим также, что семья одинаково ценит потребление всех 2+*n* ныне живущих членов, а полезность будущего потребления семьи учитывает с коэффициентом дисконтирования γ. В таком случае, естественно принять следующий вид целевой функции для семьи, существующей в момент времени *t*,

$$V_t = u(d_t) + (1+n)u(c_t) + \gamma\left[(1+n)u(d_{t+1}) + (1+n)^2 u(c_{t+1})\right] + \ldots$$

С другой стороны, эту целевую функцию можно записать в виде

$$\frac{V_t}{1+n} = \frac{u(d_t)}{1+n} + \left[u(c_t) + \gamma u(d_{t+1})\right] + \gamma(1+n)\left[u(c_{t+1}) + \gamma u(d_{t+2})\right] + \ldots$$

Иначе говоря, максимизируя данную целевую функцию, индивид, родившийся в момент времени *t*, учитывает «приходящуюся на него» долю полезности родителей, полезность своего потребления в первый период жизни, полезность потребления во второй период жизни с коэффициентом дисконтирования γ, а также дисконтированные полезности потребления всех своих потомков. Дисконтирование полезностей потребления потомков производится с учетом их числа – возникающий коэффициент дисконтирования равен $\gamma(1+n)$. Коэффициент γ позволяет потребителю соизмерить полезность как своего «сегодняшнего» и своего же «завтрашнего» потребления, так и свое «сегодняшнее» потребление с «завтрашним» потреблением одного своего непосредственного потомка. Уровень межпоколенческого альтруизма в модели перекрывающихся поколений для расширенной семьи оказывается настолько высоким, что потребитель ценит потребление членов семьи, живущих одновременно с ним, столь же высоко, как и свое «сегодняшнее» потребление, а потребление своих потомков – столь же высоко, как и свое будущее потребление.

В отличие от предыдущей главы, следуя [11], мы будем предполагать, что решение принимается членами расширенной семьи совместно и оказывается согласованным. Модель поведения расширенной семьи имеет вид

$$\sum_{\theta=t}^{\infty}\left[\gamma\left(1+n\right)\right]^{\theta-t}\left[u\left(d_\theta\right)+\left(1+n\right)u\left(c_\theta\right)\right]\to\max$$

$$\begin{cases} d_\theta+\left(1+n\right)\left(c_\theta+s_\theta\right)\le\left(1+n\right)w_\theta+R_\theta s_{\theta-1}, \quad \theta=t,t+1,\ldots \\ s_{t-1}\le\overline{s}_{t-1} \end{cases}$$

В этой постановке задачи ограничения, связанные с неотрицательностью межпоколенческих трансфертов $x_\theta, z_\theta\ge 0, \quad \theta=t,t+1,\ldots$, исчезают, так как решение принимается членами расширенной семьи совместно, и значение имеют лишь чистые межпоколенческие трансферты $\xi_\theta=x_\theta/\left(1+n\right)-z_\theta$, которые могут иметь любой знак.

Будем считать, что функция полезности потребления $u\left(\cdot\right)$ удовлетворяет естественным условиям – является непрерывной, монотонно возрастающей, строго вогнутой и дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbf{R}_+$, причем $u'\left(0\right)=\infty$. Тогда последовательность $\left(c_\theta, d_\theta, s_\theta\right)_{\theta=t,t+1,\ldots}$ является решением данной задачи оптимизации (оптимумом потребителя) только тогда, когда для нее при всех $\theta=t,t+1,\ldots$ выполнены условия

$$\begin{cases} d_\theta+\left(1+n\right)\left(c_\theta+s_\theta\right)=\left(1+n\right)w_\theta+R_\theta s_{\theta-1}, \\ u'\left(c_\theta\right)=u'\left(d_\theta\right), \\ \gamma R_{\theta+1}u'\left(d_{\theta+1}\right)=u'\left(d_\theta\right). \end{cases}$$

Указанные необходимые условия становятся достаточными, если их дополнить условием трансверсальности, в данном случае имеющим вид

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\gamma\left(1+n\right)\right]^t u'\left(c_t\right)s_t=0\,.$$

Подробнее об условиях трансверсальности см. [6].

Производственный сектор

Как и ранее, будем предполагать, что производственный сектор описывается неоклассической макроэкономической производственной функцией $F\left(K,L\right)$, где K – запас основного капитала в экономике, L – численность занятых, а производственный сектор решает задачу о максимизации «экономической» прибыли при заданных ставке процента r и ставке заработной платы w. При условии полного выбытия капитала за рассматриваемый период времени условия равновесия на рынках капитала и труда имеют вид

$$R = 1 + r = F_K'(K, L), \quad w = F_L'(K, L).$$

Введем капиталовооруженность труда $k = K/L$ и производственную функцию в интенсивной форме

$$f(k) = F(k, 1) = \frac{1}{L} F(K, L),$$

которую будем считать дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbf{R}_+$, монотонно возрастающей и строго вогнутой, причем $f(0) = 0$. Тогда, условия равновесия на рынках труда и капитала можно переписать в виде $R = f'(k), \quad w = f(k) - k f'(k)$.

Равновесие в модели перекрывающихся поколений для расширенной семьи

Единственным источником пополнения основного капитала, предположительно полностью выбывающего за каждый период времени, являются сбережения индивидов

$$K_{t+1} = s_t L_t.$$

Поделив на L_t, это выражение можно переписать следующим образом

$$(1+n) k_{t+1} = s_t.$$

Это уравнение описывает эволюцию капиталовооруженности в зависимости от сбережений s_t.

Сделанные предположения позволяют нам определить равновесие в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом.

Определение 3

Последовательность $\left(k_\theta^*, R_\theta^*, w_\theta^*, c_\theta^*, d_\theta^*, s_\theta^*\right)_{\theta = t, t+1, \ldots}$, где $k_\theta^* > 0, \theta = t, t+1, \ldots$, называется равновесной траекторией в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом, если выполняются следующие условия:

- $R^* = f'\left(k_\theta^*\right), \quad w^* = f\left(k_\theta^*\right) - k_\theta^* f'\left(k_\theta^*\right), \quad \theta = t, t+1, \ldots;$

- последовательность $\left(c_{\theta}, d_{\theta}, s_{\theta}\right)_{\theta=t,t+1,\ldots}$ является оптимумом потребителя;
- $\left(1+n\right)k^{*}_{\theta+1} = s^{*}_{\theta}, \quad \theta = t, t+1, \ldots .$

В дальнейшем мы будем интересоваться стационарными равновесиями в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом, т.е. равновесиями, для которых

$$\left(k^{*}_{\theta}, R^{*}_{\theta}, w^{*}_{\theta}, c^{*}_{\theta}, d^{*}_{\theta}, s^{*}_{\theta}\right)_{\theta=t,t+1,\ldots} = \left(k^{*}, R^{*}, w^{*}, c^{*}, d^{*}, s^{*}\right).$$

Условия, характеризующие стационарные равновесия, имеют вид:

$$R^{*} = f'\left(k^{*}\right) = \frac{1}{\gamma}, \quad w^{*} = f\left(k^{*}\right) - k^{*} f'\left(k^{*}\right),$$

$$c^{*} = d^{*} = \frac{\left(1+n\right)w^{*} + \left[R^{*} - \left(1+n\right)\right]s^{*}}{2+n},$$

$$\left(1+n\right)k^{*} = s^{*} > 0.$$

При этом условие трансверсальности выполнено тогда и только тогда, когда $\gamma\left(1+n\right) < 1$.

Полученные выражения позволяют сделать следующие выводы:

- потребление членов расширенной семьи оказывается одинаковым на протяжении всей жизни;
- чистые трансферты от родителей к детям определяются выражением

$$\xi^{*} = \frac{x^{*}}{1+n} - z^{*} = \frac{\left(1+R^{*}\right)s^{*} - w^{*}}{2+n}$$

и могут быть как положительными, так и отрицательными.

Равновесная капиталовооруженность в данной модели определяется, как и в модели Рамсея, модифицированным «золотым» правилом.

2.2. Пенсионная система в модели перекрывающихся поколений для расширенной семьи

В данном разделе в рамках модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом мы рассмотрим обязательную накопительную и распределительную пенсионные системы, причем последняя будет описана в случае совершенного рынка капитала.

Совершенность рынка капитала подразумевает, что индивид имеет возможность занимать, что означает, что допустима отрицательность личных сбережений индивида. При несовершенном рынке капитала индивид ограничен в кредите – с технической точки зрения этот случай удобнее рассмотреть в разделе «Модель перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом и неоднородными потребителями».

Накопительная пенсионная система в случае совершенного рынка капитала

Введем в рассматриваемую модель обязательную накопительную пенсионную схему, устроенную следующим образом: в первый период своей жизни индивид, родившийся в момент времени t, обязан внести вклад в пенсионный фонд в размере $a_t \geq 0$, а во второй период он получает пенсию в размере $R_{t+1}a_t$. Бюджетные ограничения индивида при этом имеют вид

$$\begin{cases} c_t + s_t + a_t = w_t + \dfrac{x_t}{1+n} - z_t \\ d_{t+1} + x_{t+1} = R_{t+1}\left(s_t + a_t\right) + \left(1+n\right) z_t \end{cases}.$$

При этом задача для расширенной семьи при наличии накопительной пенсионной системы оказывается полностью эквивалентной такой же задаче в случае без пенсионной системы

$$\sum_{\theta=t}^{\infty} \left[\gamma\left(1+n\right)\right]^{\theta-t} \left[u\left(d_\theta\right) + \left(1+n\right)u\left(c_\theta\right)\right] \to \max$$

$$\begin{cases} d_\theta + \left(1+n\right)\left(c_\theta + s_\theta + a_\theta\right) \leq \left(1+n\right) w_\theta + R_\theta\left(s_{\theta-1} + a_{\theta-1}\right), \quad \theta = t, t+1, \ldots \\ s_{t-1} \leq \overline{s}_{t-1} \end{cases}$$

Это позволяет сделать вывод, что введение накопительной пенсионной системы лишь уменьшает добровольные сбережения s_θ^* на a_θ, и иного влияния на состояние равновесия в данной модели не оказывает.

Следует заметить, что сформулированные выше условия равновесия в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом требовали положительности сбережений. При введении пенсионной системы это требование модифицируется, превращаясь в необходимость положительности суммарных сбережений индивида, включающих его накопления в пенсионном фонде

$$(1+n)\,k^*_{\theta+1} = s^*_\theta + a_\theta > 0, \qquad \theta = t, t+1, \ldots$$

Это значит, что в равновесии в модели перекрывающихся поколений с накопительной пенсионной системой добровольные сбережения индивида могут быть отрицательными, т.е. он может занимать. При этом объем заимствования не может превосходить пенсионных накоплений индивида, которые в данном случае можно трактовать как обеспечение займа [6].

Распределительная пенсионная система в модели перекрывающихся поколений для расширенной семьи

Введение распределительной пенсионной системы означает, что бюджетные ограничения индивидов разных поколений, одновременно живущих в период *t*, имеют вид

$$\begin{cases}(1+n)(c_t + s_t + z_t + a_t) = (1+n)\,w_t + x_t\\ d_t + x_t = R_t s_{t-1} + (1+n)(z_t + a_t)\end{cases},$$

т.е. распределительная схема описывается принудительным межпоколенческим трансфертом от детей к родителям. Однако, бюджетное ограничение расширенной семьи при введении распределительной системы не меняется

$$d_t + (1+n)(c_t + s_t) = (1+n)\,w_t + R_t s_{t-1}\,.$$

Это означает, что индивиды при введении распределительной пенсионной системы, оставляя неизменными свои решения относительно потребления и сбережений, перестраивают добровольные межпоколенческие трансферты так, чтобы полностью скомпенсировать эффект пенсионной системы. Чистые трансферты от родителей к детям увеличиваются на величину принудительного трансферта от детей к родителям. В стационарном равновесии, возможном, естественно, лишь при $a_\theta = a, \quad \theta = t, t+1, \ldots$, чистые трансферты от родителей к детям приобретают вид

$$x^* - (1+n)\,z^* = \frac{1+n}{2+n}\left[(1+R^*)\,s^* - w^*\right] + (1+n)\,a\,.$$

2.3. Модель перекрывающихся поколений для расширенной семьи в случае неоднородных потребителей

В данном разделе мы будем считать, что существует две группы населения, состоящие из «терпеливых» и «нетерпеливых» семей. «Терпеливыми» будем считать индивидов, характеризующихся коэффициентом дисконтирования γ_h, а «нетерпеливыми» – индивидов с меньшим коэффициентом дисконтирования $\gamma_l < \gamma_h$. Естественно, предполагается, что в пределах семьи все индивиды имеют один и тот же коэффициент дисконтирования, т.е. он в равной степени характеризует и индивида, и семью. Мы предполагаем, что $\gamma_h(1+n) < 1$.

При построении модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом и неоднородными потребителями мы будем предполагать, что на сбережения как «терпеливых» так и «нетерпеливых» индивидов наложено ограничение снизу

$$s_{h\theta} \geq \underline{s}, \quad s_{l\theta} \geq \underline{s}, \quad \theta = t, t+1, \ldots$$

где $\underline{s}$ – некоторая экзогенно заданная величина, которую естественно считать равной нулю или отрицательной: $\underline{s} \leq 0$. Величина $-\underline{s}$ при этом определяет предельный долг в расчете на каждого члена семьи, и в некоторых ситуациях, вероятно, описывает несовершенство рынка капитала – в частности, $\underline{s} = 0$ означает, что кредит индивиду недоступен.

Стационарное равновесие в модели перекрывающихся поколений для расширенной семьи в случае неоднородных потребителей

Пусть $0 < \sigma \leq 1$ – доля «терпеливых» индивидов в общей численности населения.

Определение 4

Определим стационарное равновесие в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом и неоднородными потребителями как набор $\left\{k^*, R^*, w^*, c_l^*, d_l^*, s_l^*, c_h^*, d_h^*, s_h^*\right\}$, для которого $k^* > 0$, а также выполняются следующие условия:

- $R^* = f'\left(k^*\right), \quad w^* = f\left(k^*\right) - k^* f'\left(k^*\right)$;

- последовательность $(c_\theta, d_\theta, s_\theta)_{\theta=t,t+1,\dots} = (c_l^*, d_l^*, s_l^*)$ является оптимумом потребителя с коэффициентом дисконтирования γ_l, т.е. решением задачи

$$\sum_{\theta=t}^{\infty} \left[\gamma_l (1+n)\right]^{\theta-t} \left[u(d_\theta)+(1+n)u(c_\theta)\right] \to \max$$

$$\begin{cases} d_\theta + (1+n)(c_\theta + s_\theta) \le (1+n) w_\theta^* + R_\theta^* s_{\theta-1} \\ s_\theta \ge \underline{s}, \quad \theta = t, t+1, \dots \\ \underline{s} \le s_{t-1} \le \overline{s}_{t-1} \end{cases}$$

- последовательность $(c_\theta, d_\theta, s_\theta)_{\theta=t,t+1,\dots} = (c_h^*, d_h^*, s_h^*)$ является оптимумом потребителя с коэффициентом дисконтирования γ_h;
- $(1+n)k^* = \sigma s_h^* + (1-\sigma) s_l^*$.

Выпишем условия стационарного равновесия в модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом и неоднородными потребителями:

3. Условия стационарного оптимума потребителя для «нетерпеливого» индивида имеют вид

$$c_l^* = d_l^* = \frac{(1+n)w^* + \left[R^* - (1+n)\right] s_l^*}{2+n},$$

$$s_l^* \ge \underline{s}, \quad R^* \le \frac{1}{\gamma_l}, \quad \left(\frac{1}{\gamma_l} - R^*\right)\left(s_l^* - \underline{s}\right) = 0.$$

Условие $\left(1/\gamma_l - R^*\right)\left(s_l^* - \underline{s}\right) = 0$ означает, что неравенство $R^* \le 1/\gamma_l$ превращается в равенство при $s_l^* > \underline{s}$.

4. Условия стационарного оптимума потребителя для «терпеливого» индивида имеют вид

$$c_h^* = d_h^* = \frac{(1+n)w^* + \left[R^* - (1+n)\right] s_h^*}{2+n},$$

$$s_h^* \ge \underline{s}, \quad R^* \le \frac{1}{\gamma_h}, \quad \left(\frac{1}{\gamma_h} - R^*\right)\left(s_h^* - \underline{s}\right) = 0.$$

5. Эволюция капиталовооруженности описывается выражением

$$(1+n)k^* = \sigma s_h^* + (1-\sigma) s_l^* > 0 .$$

Из условий 1–3, которые в равновесии должны выполняться совместно, видно, что в стационарном равновесии мы будем иметь $R^* \le 1/\gamma_h < 1/\gamma_l$, т.е. $s_l^* = \underline{s}$ – «нетерпеливые» индивиды не только не делают сбережений, но и максимально используют предоставляемые им возможности для заимствования. Для обеспечения положительного уровня капиталовооруженности сбережения остается делать «терпеливым» индивидам, для которых будем иметь $R^* = 1/\gamma_h$. Условия стационарного равновесия позволяют сделать следующие выводы

- потребление как «терпеливых» так и «нетерпеливых» индивидов не меняется на протяжении всей их жизни;
- потребление членов семьи, состоящей из «нетерпеливых» индивидов, составляет
$$c_l^* = d_l^* = \frac{(1+n)\,w^* + \left[R^* - (1+n)\right]\underline{s}}{2+n}.$$
Величина $\underline{s} \le 0$ при этом предполагается не слишком большой по модулю, чтобы обеспечить $c_l^* = d_l^* > 0$.
Чистые трансферты от родителей к детям в такой семье оказываются отрицательными
$$\xi_l^* = \frac{x_l^*}{1+n} - z_l^* = \frac{(1+R^*)\underline{s} - w^*}{2+n},$$
т.е. имеет место чистая помощь родителям со стороны детей.
- сбережения члена «терпеливой» семьи определяются уравнением
$$\gamma_h f'\left(\frac{\sigma s_h^* + (1-\sigma)\underline{s}}{1+n}\right) = 1,$$
а потребление ее членов составляет величину
$$c_h^* = d_h^* = \frac{(1+n)\,w^* + \left[R^* - (1+n)\right]s_h^*}{2+n}.$$
В такой семье чистые трансферты от родителей к детям могут быть как положительными, так и отрицательными
$$\xi_h^* = \frac{x_h^*}{1+n} - z_h^* = \frac{(1+R^*)s_h^* - w^*}{2+n}.$$

Накопительная пенсионная система в случае несовершенного рынка капитала

Ситуация меняется при введении накопительной пенсионной системы в случае несовершенного рынка капитала. При этом «нетерпеливые» индивиды, так же как и «терпеливые», владеют капиталом, делая вынужденные сбережения, предусмотренные обязательной пенсионной системой, а «терпеливые» индивиды могут уменьшать добровольные сбережения до нуля, или даже заимствовать, так как равновесная капиталовооруженность обеспечивается не только за счет добровольных сбережений, но и за счет пенсионных накоплений.

Пусть добровольные сбережения ограничены снизу прежним уровнем $\underline{s} \le 0$, но как «терпеливые», так и «нетерпеливые» индивиды обязаны делать вынужденные сбережения в размере a.

В стационарном равновесии выполняются следующие соотношения:

$$c_h^* = d_h^* = \frac{(1+n)w^* + \left[R^* - (1+n)\right](s_h^* + a)}{2+n},$$

$$c_l^* = d_l^* = \frac{(1+n)w^* + \left[R^* - (1+n)\right](\underline{s} + a)}{2+n},$$

$$\sigma\left(s_h^* + a\right) + (1-\sigma)(\underline{s} + a) = (1+n)k^* > 0, \quad w^* = f\left(k^*\right) - k^* f'\left(k^*\right),$$

$$R^* = f'\left(k^*\right) \le \frac{1}{\gamma_h}, \quad s_h^* \ge \underline{s}, \quad \left(\frac{1}{\gamma_h} - R^*\right)\left(s_h^* - \underline{s}\right) = 0.$$

При этом оказываются возможными несколько ситуаций:

- $0 \le a < a_{cr}$, где $\gamma_h f'\left[\left(a_{cr} + \underline{s}\right)/(1+n)\right] = 1$, $a_{cr} > -\underline{s}$. При этом существует $s_h^* > \underline{s}$ такое, что $\sigma s_h^* + (1-\sigma)\underline{s} + a = (1+n)k^*$ и $\gamma_h = 1/R^*$. Введение накопительной системы с таким уровнем обязательных сбережений приводит для «нетерпеливых» индивидов к росту потребления и росту чистых трансфертов от родителей к детям

$$\xi_l^* = \frac{x_l^*}{1+n} - z_l^* = \frac{\left(1+R^*\right)(\underline{s} + a) - w^*}{2+n},$$

и не влияет на потребление и чистые трансферты «терпеливых» индивидов.

- $a_{cr} \le a \le a'_{cr}$, где $f'\left[\left(a'_{cr} + \underline{s}\right)/(1+n)\right] = 1+n < 1/\gamma_h$. При этом в стационарном равновесии $s_h^* = \underline{s}$, $(1+n)k^* = a + \underline{s}$, и $\gamma_h \le 1/R^*$, но траектория все еще является динамически эффективной $\left(R^* \ge 1+n\right)$. Это означает, что существует некоторое критическое значение уровня обязательных сбережений в рамках накопительной пенсионной системы a_{cr}, при превышении которого даже «терпеливые» индивиды максимально используют свои возможности по заимствованию. При этом оказывается, что и «терпеливые» и «нетерпеливые» индивиды берут в долг у пенсионного фонда, т.е. из своих же обязательных сбережений. Введение накопительной системы с таким уровнем обязательных сбережений приводит к росту потребления как «терпеливых», так и «нетерпеливых» индивидов, приближая уровень капиталовооруженности к «золотому».
- $a > a'_{cr}$ – дальнейшее повышение уровня обязательных сбережений приводит к перенакоплению, к динамической неэффективности траектории и уменьшает потребление как «терпеливых», так и «нетерпеливых» индивидов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели две модели перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом. Первая модель позволила проанализировать случай различной склонности индивида помогать своим детям и родителям («несимметричный» альтруизм). Равновесие в ней представляет собой равновесие по Нэшу, когда родители и дети принимают решения, исходя из собственных предпочтений, полагая выбор остальных участников заданным. Ситуация, описываемая второй моделью, оказывается эквивалентной случаю, когда два последовательных поколения – неработающие родители и работающие дети, имеют общий бюджет.

В обоих случаях мы находим стационарное равновесие, обсуждаем условия его существования, описываем обязательные накопительную и распределительную пенсионные системы, причем для накопительной пенсионной системы рассматривается как случай совершенного рынка капитала, так и ситуация, когда индивид ограничен в получении кредита. Далее мы обобщаем модели на случай неоднородных потребителей.

Предлагаемые модели представляются полезными при размышлении об эффектах распределительной или накопительной пенсионной системы в странах с распространенным двусторонним межпоколенческим альтруизмом, к которым, по выводам многих исследователей, относится и Россия.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Allais M. Economie et intérêt. Paris: Imprimerie Nationale, 1947.
2. Samuelson P.A. An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money // The Journal of Political Economy, 1958, 66(6), pp. 467-482.
3. Diamond P. National debt in a neoclassical growth model // The American Economic Review, 1965, 55(5), pp. 1126-1150.
4. Barro R.J. Are government bonds net wealth? // The Journal of Political Economy, 1974, 82(6), pp. 1095-1117.
5. Борисов К.Ю. Агрегированные модели экономического роста и распределения. – СПб.: СПбЭМИ РАН, 2005.
6. Croix D. de la, Michel P. A theory of economic growth: dynamics and policy in overlapping generations. – Cambridge University Press, 2002.
7. Abel A.B. Operative gift and bequest motives // The American Economic Review, 1987, 77(5), pp. 1037-1047.
8. Michel P., Thibault E., Vidal J.-P. Intergenerational altruism and neoclassical growth models // Handbook of the economics of giving, altruism and reciprocity / Ed. by Kolm S.-C., Ythier J.M. – Elsevier B.V., 2006. P. 1055-1106.
9. Altonji, J.G., Hayashi, F., Kotlikoff, L.J., Is the extended family altruistically linked? Direct tests using micro data. 1989. N.B.E.R. Working paper No. 3046.
10. Котликофф Л., Бернс, С. Пенсионная система перед бурей: то, что нужно знать каждому о финансовом будущем своей страны. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2005.
11. Борисов К.Ю., Сурков А.В. Модель перекрывающихся поколений с двусторонним альтруизмом // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. VI. Сборник трудов Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН / А.А. Корбут, С.Л. Печерский, Л.А. Руховец, ред. СПб.: Нестор-История, 2007. С. 45-60.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Борисов Кирилл Юрьевич – доктор экономических наук, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН, декан факультета экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге, профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Сурков Александр Владимирович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН, доцент факультета экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге, доцент кафедры экономической теории экономического факультета Санкт-Петербургского филиала государственного университета – Высшей школы экономики.

Объем 1,5 п.л. Печать ризографическая. Тираж 100 экз.
Европейский университет в Санкт-Петербурге
191187 Санкт-Петербург, ул. Гагаринская, д. 3.